BACHELOR'S DEGREE THESIS

Degree in Mathematics

Title: Teorema d'Aproximació de Weierstraß: demostracions alternatives, generalitzacions i aplicacions

Author: Javi Gutiérrez Bisbal

Advisor: Jaume Franch Bullich

Department: Mathematics

Academic year: 2017-2018

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Teorema d'aproximació de Weierstraß: demostracions alternatives, generalitzacions i aplicacions

Javi Gutiérrez

25 juny 2018

Índex

Capítol 1

Introducció: repàs d'Anàlisi real

1.1 Motivacions: Una mica d'història

A l'assignatura d'Anàlisi real vam enunciar els teoremes d'aproximació de Weierstraß per polinomis i el de Stone-Weierstraß. Del primer en vam fer una demostració fent servir polinomis de Bernstein, i del segon en vam fer una demostració fent servir el primer. I sobretot em va cridar la curiositat de trobar demostracions alternatives del primer teorema, així com demostracions del segon que no fessin servir la primera.

Aquest problema d'aproximar funcions per polinomis (i en general per reticles o àlgebres de funcions) va tenir els seus orígens al món de la topologia, on donat un espai topològic X, es volien trobar tots els subconjunts densos a aquest espai, és a dir, la clausura dels quals és tot l'espai.

Els primers resultats arrel d'això van ésser gràcies a Karl Weierstraß (1815-1897), que va provar al 1885 la densitat dels polinomis amb coeficients i variable reals a l'espai de funcions contínues en un compacte, i també dels polinomis trigonomètrics 2π-periòdics. Això va fer augmentar la necessitat de rigor a les matemàtiques i també va desenvolupar molt l'anàlisi.

Durant els següents més o menys 25 anys, d'altres matemàtics famosos van ensenyar demostracions alternatives del teorema, com ara Picard (1891), Volterra (1897), Lebesgue (1898), Mittag-Leffler (1900), Landau (1908), i De la Valleé Poussin (1912). Però les més apreses a estudis de grau són les de Féjer (1900) i la de Bernstein (1912).

Weierstraß també va fer generalitzacions del teorema amb funcions contínues de les menes $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ i $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Aquest treball es divideix en sis capítols. El primer, que és aquest mateix, recull un repàs de les demostracions que vam fer a Anàlisi real. El segon recull demostracions alternatives del Teorema d'Aproximació de Weierstraß. El tercer recull demostracions del Teorema de Stone-Weierstraß que no fan servir l'anterior. El quart fa unes generalitzacions d'aquests dos teoremes i planteja sota quines condicions són certs. El cinquè mostra les diferents aplicacions a les que es poden aplicar aquests teoremes i generalitzacions. I al sisè ja hi apareixen les conclusions arrel de tota l'explicació.

1.2 Teorema d'Aproximació de Weierstraß

Com hem vist anteriorment a l'assignatura d'Anàlisi real, donats un interval tancat $[a, b]$, i una funció contínua f en aquest conjunt, diem que el teorema d'aproximació de Weierstraß enuncia que

$$\exists (p_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[x]^\omega : \forall x \in [a,b], \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \\ |f(x) - p_n(x)| < \epsilon$$

I una prova coneguda d'aquest teorema és per aproximació amb polinomis de Bernstein: f definida a $[0, 1]$ (sempre podem reescalar amb $g(x) := f(a + (b - a)x)$),

$$B_{n,f}(x) := \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, n \in \mathbb{N}$$

I demostrarem que

$$\forall x \in [0,1], \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |f(x) - B_{n,f}(x))| < \epsilon$$

Lema 1.2.1: $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n}$$

Dem.: Del teorema del binomi de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k} = (x+a)^n$$

tenim, derivant respecte x i després multiplicant per x,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k a^{n-k} = nx(x+a)^{n-1}$$

Repetint la mateixa operació amb aquesta última fórmula, tenim que:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2x^ka^{n-k}=nx(x+a)^{n-1}+n(n-1)x^2(x-a)^{n-2}$$

Si en aquestes tres relacions canviem a per $1-x$, tenim que:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1 \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k(1-x)^{n-k}=nx$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2x^k(1-x)^{n-k}=nx+n(n-1)x^2$$

Multiplicant aquestes darreres per n^2x^2, $-2nx$ i 1 respectivament, sumant-les, i dividint el resultat final entre n^2, obtenim:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}$$

on el numerador és com a molt 1/4 si $x\in[0,1]$. $\square$ QED.

Demostració del teorema: De (1.1) tenim que:

$$f(x)=f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=$$
$$\sum_{k=0}^{n}f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$|f(x)-B_{n,f}(x))|=\Big|\sum_{k=0}^{n}(f(x)-f(k/n))\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Big|\leq$$
$$\sum_{k=0}^{n}|f(x)-f(k/n)|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Sigui $\alpha:=||f||$. Llavors $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0:|x-y|<\delta\implies|f(x)-f(y)|<\epsilon/2$. Sigui n tal que $n\geq max\{\frac{1}{\delta^4},\frac{\alpha^2}{\epsilon^2}\}$. Fixat $x\in[0,1]$, definim $I\subseteq\{0,...,n\}$ tal que $|x-k/n|<n^{-1/4}<\delta,k\in I$, i $J:=\{0,...,n\}\backslash I$. Llavors bifurquem la suma:

$$\sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k\in I} |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$+ \sum_{k\in J} |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

I llavors pels termes en I tenim:

$$\sum_{k\in I} |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \frac{\epsilon}{2} \sum_{k\in I} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq$$
$$\frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\epsilon}{2}$$

I pels termes en J, sabent que $(x - k/n)^2 \geq n^{-1/2}$, tenim que:

$$\sum_{k\in J} |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < 2\alpha \sum_{k\in J} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$
$$2\alpha \sum_{k\in J} \binom{n}{k} \frac{(x-k/n)^2}{(x-k/n)^2} x^k (1-x)^{n-k} \leq$$
$$2\alpha\sqrt{n} \sum_{k\in J} (x-k/n)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq$$
$$2\alpha\sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} (x-k/n)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\alpha}{2\sqrt{n}} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

d'on a les desigualtats hem fet servir el lema 1.2.1. I sumant els termes, surt que la distància és menor que ϵ. □ QED.

1.3 Teorema de Stone-Weierstraß

També a Anàlisi real hem vist una generalització d'aquest teorema on les funcions que aproximen no són necessàriament polinomis, sinó elements d'una subàlgebra. Però no pot ésser qualsevol subàlgebra: cal que compleixi certes condicions addicionals. Per demostrar aquest teorema, primer farem servir el Teorema de Stone, on s'utilitzen reticles.

Definim

$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$$

$$(f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

I tenim les identitats següents:

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \tag{1.2}$$

$$f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2} \tag{1.3}$$

i es dedueix que també són contínues. Direm que $\mathcal{B}$ és un reticle si és tancat per aquestes operacions.

Teorema de Stone (1.3.1): Sigui $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ un reticle tal que $\forall x \neq y \in [a,b], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \exists f \in \mathcal{B} : f(x) = \alpha, f(y) = \beta$, i a aquesta propietat se l'anomena interpolar punts. Llavors $\mathcal{B}$ és dens a $\mathcal{C}([a,b])$.

Dem.: Sigui $\epsilon > 0, f \in \mathcal{C}([a,b])$. Demostrarem que $\forall \xi \in [a,b], \exists f_\xi \in \mathcal{B}$:

1. $f_\xi(\xi) = f(\xi)$
2. $f_\xi(x) < f(x) + \epsilon \quad \forall x \in [a,b]$

De la hipòtesi (2), $\forall t \in [a,b] \backslash \{\xi\}, \exists f_t \in \mathcal{B}$:

$$f_t(\xi) = f(\xi), f_t(t) = f(t)$$

Amb t donat, la continuïtat de f_t ens assegura l'existència d'un obert $B(t, r_t)$ (dep. t, ϵ) tal que:

$$\forall x \in B(t, r_t) \cap [a,b], f_t(x) - f(t) < \epsilon$$

El conjunt d'oberts $\{B(t, r_t) : t \in [a,b] \backslash \{\xi\}\}$ és un recobriment obert de $[a,b]$, i com que aquest conjunt és compacte, podem obtenir un nombre finit de punts $t_1, ..., t_n \in [a,b]$ tals que:

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(t_i, r_{t_i})$$

Siguin $f_{t_1}, ..., f_{t_n} \in \mathcal{B}$ les funcions corresponents a aquests punts, i:

$$f_\xi = \bigwedge_{i=1}^{n} f_{t_i}$$

Com que $\mathcal{B}$ és un reticle, tenim que $f_\xi \in \mathcal{B}$. Com que $f_t(\xi) = f(\xi) \quad \forall t$, serà $f_\xi(\xi) = f(\xi)$, i ja tenim la hipòtesi 1. Donat $x \in [a,b], \exists t_i \in [a,b] : x \in B(t_i, r_{t_i})$. En aquest obert $f_{t_i}(x) < f(x) + \epsilon$, i com que $f_\xi(x) < f_{t_i}(x)$, llavors $f_\xi(x) < f(x) + \epsilon$, i això és la hipòtesi 2.

Ara considerem les f_ξ com un conjunt, i amb l'ajut de $\vee$, construïm g que aproxima uniformement f:

Com que $f_\xi(\xi) = f(\xi)$, $\forall \xi, \exists B(\xi, r_\xi)$ (dep. ξ, ϵ):

$$\forall x \in B(\xi, r_\xi) \cap [a,b], f(\xi) - f_\xi(x) < \epsilon$$

Amb el mateix argument d'abans, $\exists \xi_1, ..., \xi_m$:

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(\xi_i, r_{\xi_i})$$

Posem ara:

$$g := \bigvee_{i=1}^{m} f_{\xi_i}$$

Donat $x \in [a,b], \exists \xi_i : x \in B(\xi_i, r_{\xi_i})$, i en aquest obert,

$$f_{\xi_i}(x) > f(x) - \epsilon$$

i com que $g(x) \geq f_{\xi_i}(x)$,

$$g(x) > f(x) - \epsilon \quad \forall x \in [a,b] \tag{1.4}$$

D'altra banda, $f_\xi(x) < f(x) + \epsilon \quad \forall x \in [a,b]$, pel que pel mateix argument,

$$g(x) < f(x) + \epsilon \quad \forall x \in [a,b] \tag{1.5}$$

Combinant (1.4) i (1.5) ens queda que:

$$|g(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a,b]$$

tal com volíem. □ QED.

Definició 1.3.2: $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b]), \mathbb{R}$ separa punts si $\forall x \neq y \in [a,b], \exists f \in \mathcal{B} : f(x) \neq f(y)$.

Proposició 1.3.3: Sigui $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b])$ un subespai vectorial que conté les constants i separa punts. Llavors interpola punts.

Dem.: Siguin $x \neq y \in [a,b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Com que $\mathcal{B}$ separa punts, $\exists g \in \mathcal{B} : g(x) \neq g(y)$. Llavors definim:

$$f(z) := \frac{\alpha - \beta}{g(x) - g(y)}(g(z) - g(y)) + \beta$$

I compleix $f(x) = \alpha, f(y) = \beta$, i a més $f \in \mathcal{B}$, ja que $\mathcal{B}$ és un EV i conté la constant 1. □ QED.

Proposició 1.3.4: Un SEV de funcions és reticle $\iff$ tancat respecte el valor absolut.

Dem.: Manipulant les definicions (1.2) i (1.3) degudament:

$$|f - g| = (f \vee g) - (f \wedge g)$$

ja n'hi ha prou. $\square$ QED.

Lema 1.3.5: Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ és una subàlgebra que conté les constants, i $f \in \mathcal{B}$, llavors $|f| \in \bar{\mathcal{B}}$.

Dem.: De la proposició 1.3.3, cal veure que podem aproximar uniformement $|f|$ amb elements de $\mathcal{B}$. Sigui $\epsilon > 0, g \in \mathcal{C}([-\|f\|, \|f\|], \mathbb{R})$ donada per $g(x) = |x|$. Pel TAW, $\exists p \in \mathbb{R}[x]$:

$$|p(x) - g(x)| < \epsilon \quad \forall x : -\|f\| \leq x \leq \|f\|$$

Sigui $p(\xi) := \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k$. Tenim que:

$$(p \circ f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x)^k$$

Com que $f \in \mathcal{B}$ i $\mathcal{B}$ és una subàlgebra que conté les constants, llavors $p \circ f \in \mathcal{B}$. Llavors:

$$|p(f(x)) - |f(x)|| < \epsilon \quad \forall x \in [a,b]. \square \text{ QED.}$$

I ara ens queda demostrar el teorema:

Siguin $(f_n), (g_n) \in \mathcal{B}, f = \lim f_n, g = \lim g_n$. Per tant tenim per $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha f = \alpha \lim f_n = \lim \alpha f_n \in \bar{\mathcal{B}}$$

$$f + g = \lim f_n + \lim g_n = \lim(f_n + g_n) \in \bar{\mathcal{B}}$$

$$fg = \lim f_n \lim g_n = \lim(f_n g_n) \in \bar{\mathcal{B}}$$

Per tant, $\bar{\mathcal{B}}$ és subàlgebra, i com conté les constants, pel lema 1.3.5, $\bar{\mathcal{B}}$ és tancat pel valor absolut. I com $\bar{\mathcal{B}}$ a més és subespai vectorial, llavors per la proposició 1.3.4, és reticle i separa punts. I com a més és subespai vectorial i conté les constants, per la proposició 1.3.3, interpola punts. I com a més és reticle, pel teorema de Stone, la seva adherència és $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, però com l'adherència de tot tancat és ell mateix, llavors de fet aquesta és una igualtat de conjunts. $\square$ QED.

Però al capítol 3, tractarem de cercar alguna demostració que no faci servir aquest argument, és a dir, que no empri TAW per demostrar TSW.

Capítol 2

Teorema d'aproximació de Weierstraß

2.1 Aproximació per polinomis de Landau

En aquesta secció donarem una aproximació de la funció f amb polinomis de Landau, tot seguint el link de [16], suposant que és definida a l'interval tancat $[-1, 1]$. Però abans cal definir conceptes previs:

Definició 2.1.1: El producte de convolució entre dues funcions integrables es defineix com:

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Propietat: El producte de convolució és commutatiu.

Definició 2.1.2: Els polinomis de Landau es defineixen com:

$$K_n(x) := c_n(1-x^2)^n \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$$

i c_n s'escull de manera que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)dx = 1$$

Això vol dir que:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = 2\int_{0}^{1} (1-t)^n(1+t)^n dt \\ \geq 2\int_{0}^{1} (1-t)^n = \frac{2}{n+1} \implies c_n \leq \frac{n+1}{2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Lema 2.1.3: $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ contínua $\implies K_n * f \in \mathbb{R}[x]$. Dem.:

$$(K_n * f)(x) = \int_{-1}^{1} K_n(x-t)f(t)dt; K_n \in \mathbb{R}[x] \implies$$
$$K_n(x-t) = \sum_{i=0}^{2n} g_i(t)x^i \implies (K_n * f)(x) =$$
$$\int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{2n} f(t)g_i(t)x^i dt = \sum_{i=0}^{2n} x^i H_i \in \mathbb{R}[x]. \ \square \text{ QED}$$

I aquí, amb tot aquest argument de definicions prèvies, ve una altra prova del teorema d'aproximació de Weierstraß:

Lema 2.1.4: $K_n * f \xrightarrow{n\to\infty} f$ uniformement.

Dem.: Com que f és contínua a [-1,1], és uniformement contínua, i per tant, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t| < \delta \implies |f(x-t) - f(x)| < \epsilon/3$, i a més pel teorema del màxim i el mínim de Weierstraß, $\|f\| \leq M$. Separem l'interval en $[-1,-\delta], (-\delta,\delta)$ i $[\delta,1]$. Llavors trenquem la integral en tres parts, i tenim:

$$\int_{\delta}^{1} K_n(t)dt = \int_{\delta}^{1} c_n(1-t^2)^n dt \leq \frac{n+1}{2}\int_{\delta}^{1}(1-\delta^2)^n dt =$$
$$\frac{n+1}{2}(1-\delta^2)^n(1-\delta) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,$$
$$\int_{\delta}^{1} K_n(t)dt \leq \frac{\epsilon}{6M}$$

I similarment tenim quelcom semblant per $[-1,-\delta]$. I d'aquí fent servir que $f(x) = \int_{-1}^{1} f(x)K_n(t)dt$, tenim que, per $[\delta,1]$,

$$\int_{\delta}^{1} |f(x) - f(x-t)|K_n(t)dt \leq 2M\int_{\delta}^{1} K_n(t)dt < 2M \cdot \frac{\epsilon}{6M} = \frac{\epsilon}{3}$$

i anàlogamen a $[-1,-\delta]$. I per $(-\delta,\delta)$,

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dt < \frac{\epsilon}{3}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt \leq \frac{\epsilon}{3}\int_{-1}^{1} K_n(t)dt = \frac{\epsilon}{3}$$

El que ens porta a la següent desigualtat:

$$|f(x) - (K_n * f)(x)| \leq \int_{-1}^{1} |f(x) - f(x-t)| K_n(t) dt =$$

$$\int_{-1}^{-\delta} |f(x) - f(x-t)| K_n(t) dt + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-t)| K_n(t) dt +$$

$$\int_{\delta}^{1} |f(x) - f(x-t)| K_n(t) dt \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

i això prova un cop més el teorema d'aproximació de Weierstraß. □ QED.

2.2 Aproximació per polinomis de Tonelli

Aquesta aproximació és una generalització de l'aproximació de Landau a un interval tancat qualsevol $[a, b]$. Seguirem el llibre [7] per anar fent la demostració.

Definició 2.2.1: Considerem la seqüència de polinomis

$$t_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^{1} (1-u^2)^n du}, n \in \mathbb{N}$$

Sigui $0 < \delta < 1$. Per (2.1),

$$\int_{-1}^{1} (1-u^2)^n du \geq \frac{2}{n+1}$$

D'aquí que

$$|t_n(x)| \leq \frac{n+1}{2} (1-\delta^2)^n, \quad \delta \leq |x| < 1 \tag{2.2}$$

Per tant,

$$\Big(\int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^{1} \Big) t_n(u) du \leq (n+1)(1-\delta^2)^n$$

i des que

$$\int_{-1}^{1} t_n(u) du = 1$$

tenim que:

$$\Big| \int_{-\delta}^{\delta} t_n(u) du - 1 \Big| \leq (n+1)(1-\delta^2)^n \tag{2.3}$$

Ara suposem que tenim una funció f contínua a $[a, b]$, on $0 < b - a < 1$. Podem trobar una extensió contínua de la funció a l'interval $[\alpha, \beta]$, on $\alpha < a <$

$b < \beta, \beta - \alpha < 1$. Llavors definim l'enèssim polinomi de Tonelli per a la funció f com:

$$T_n(x) := \int_\alpha^\beta f(u) t_n(u-x) du \tag{2.4}$$

Teorema 2.2.2: $T_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ uniformement a $[a,b]$.

Dem.: Com f és contínua, llavors $|f(x)| \leq M$, $x \in [a,b]$ per a alguna constant $M > 0$. Sigui $\epsilon > 0$. Com f és uniformement contínua a $[\alpha,\beta]$, $\exists\delta > 0 : |f(y) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ si $\alpha \leq z \leq y \leq \beta$ i $|y - z| < \delta$. També demanem que $\delta < min(a - \alpha, \beta - b)$. Per tant per $x \in [a,b]$ hem de tenir:

$$[x-\delta, x+\delta] \subset [\alpha,\beta] \subset [x-1, x+1]$$

Per tant, si $x \in [a,b]$, ja que $\int_\alpha^\beta t_n(u) f(x) du = f(x)$ degut a què la integral sense $f(x)$ dóna 1, tenim:

$$\begin{aligned} T_n(x) - f(x) = \int_\alpha^\beta f(u)t_n(u-x)du - f(x) = \int_\alpha^{x-\delta} f(u)t_n(u-x)du + \\ \int_{x+\delta}^\beta f(u)t_n(u-x)du + \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(u)t_n(u-x)du - f(x) = \\ \Big(\int_{\alpha-x}^{-\delta} + \int_\delta^{\beta-x} + \int_{-\delta}^\delta\Big)(f(x+u) - f(x))t_n(u)du + f(x)\Big(\int_{-\delta}^\delta t_n(u)du - 1\Big) \end{aligned}$$

Fent servir (2.2), (2.3) i (2.4), tenim que:

$$|T_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}M(n+1)(1-\delta^2)^n + \frac{\epsilon}{2} + M(n+1)(1-\delta^2)^n$$

Escollint n_0 prou gran com perquè $\frac{3}{2}M(n+1)(1-\delta^2)^n \leq \frac{\epsilon}{2}$ per $n \geq n_0$ tenim que $|T_n(x) - f(x)| < \epsilon$ per $x \in [a,b], n \geq n_0$. □ QED.

2.3 Aproximació fent servir variables aleatòries

2.3.1 Definicions prèvies

Aquí ens centrarem en una sèrie de resultats que no vénen del món de l'anàlisi, sinó del de la probabilitat. Per tant, cal donar unes definicions prèvies i uns resultats previs abans d'anar cap al teorema d'aproximació de Weierstraß:

Definició 2.3.1: Ω espai mostral, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ és una σ-àlgebra d'esdeveniments si:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
3. $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$

Definició 2.3.2: La probabilitat és una funció:

$$Pr : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

que satisfà les condicions de probabilitat:

1. $0 \leq Pr(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
2. $Pr(\Omega) = 1$

i de mesura:

1. $Pr(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
2. $Pr(\emptyset) = 0$
3. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m \implies$
   $Pr(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Pr(A_n)$

Definició 2.3.3: $\{A_i : i \in I\}$ és independent si $\forall J \subseteq I, Pr(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} Pr(A_i)$.

Definició 2.3.4: Una variable aleatòria és una funció:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

tal que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. En aquest cas es pot posar $X \leq x$.

Definició 2.3.5: Funció de distribució de X:

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto Pr(X \leq x) \end{aligned}$$

Definició 2.3.6: Dues variables aleatòries X, Y són independents si $\{X \leq x\}, \{Y \leq y\}$ són independents $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Definició 2.3.7: Dues variables aleatòries X, Y són idènticament distribuïdes si tenen la mateixa funció de distribució.

Definició 2.3.8: Funció de probabilitat de X:

1. Cas discret: $Pr(X = x)$
2. Cas continu: $f_X(x) : F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Definició 2.3.9: Esperança de X: $\mathbb{E}(X) =$

1. Cas discret: $\sum_{x\in Img(X)} xPr(X = x)$
2. Cas continu: $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$

Teorema de l'esperança (2.3.10): X variable aleatòria, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Llavors:

1. Cas discret: $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x\in Img(X)} g(x)Pr(X = x)$
2. Cas continu: $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$

sempre que $\mathbb{E}(|g(X)|)$ existeixi.

Definició 2.3.11: $X, X_1, X_2, ...$ variables aleatòries. Definim:

1. Convergència quasi segura: $X_n \xrightarrow{q.s.} X$ si $Pr(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} X(\omega)\}) = 1$
2. Convergència en mitjana r-èsima: $X_n \xrightarrow{r} X$ si $\mathbb{E}(|X_n - X|^r) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

2.3.2 Demostració del teorema: GNSL

Teorema 2.3.12 (Llei Forta dels Grans Nombres, GNSL): Siguin $X_1, X_2, ...$ variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, amb $\mathbb{E}(X_1) = \mu, \mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Aleshores:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{q.s.,2} \mu$$

I amb tota aquesta bateria de conceptes previs, escollim les variables aleatòries X_n amb la distribució $B(p), 0 < p < 1$, on $B(p)$ és la variable aleatòria amb funció de distribució 0 per valors negatius, 1-p per valors entre 0 i 1, i 1 per la resta. Després, sabent que l'esperança de $B(p)$ és p, i aplicant els teoremes de l'esperança i de la GNSL, tenim que:

$$\mathbb{E}\Big(f\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)\Big) \to f(p)$$

I aquest fet com a corol·lari del GNSL demostra el Teorema d'Aproximació de Weierstraß, ja que podem entendre el polinomi de Bernstein de f com:

$$B_{n,f}(p) = \mathbb{E}\Big(f\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)\Big)$$

i a l'ésser f contínua, el límit quan $n \to \infty$ pot entrar a dins. □ QED.

2.4 Demostració original de Weierstraß

Aquí tenim la demostració original que va fer servir en Karl Weierstraß al seu teorema d'aproximació de funcions per polinomis. Aquí seguirem el llibre [4].

Teorema 2.4.1: Per a una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fitada in uniformement contínua, i $h > 0$, definim la seva convolució amb la Gaussiana:

$$S_h(f)(x) := \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\frac{(t-x)^2}{h^2}} dt$$

Notem que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(t-x)^2}{h^2}} dt = h\sqrt{\pi}$. Llavors $S_h(f) \xrightarrow{h \to 0} f$.

Dem.: Sigui $\epsilon > 0$. Llavors $\exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. Com f és fitada, tenim que $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Com $h \to 0$, considerem $h < \epsilon\delta\sqrt{\pi}/(4M)$, i llavors tenim:

$$\begin{aligned}
|S_h(f)(x) - f(x)| = \Big| \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(x)| e^{-\frac{(t-x)^2}{h^2}} dt \Big| = \\
\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{|x-t|<\delta} |f(t) - f(x)| e^{-\frac{(t-x)^2}{h^2}} dt + \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{|x-t|\geq\delta} |f(t) - f(x)| e^{-\frac{(t-x)^2}{h^2}} dt \leq \\
\frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{h\sqrt{\pi}} \int_{|x-t|\geq\delta} e^{-\frac{(t-x)^2}{h^2}} dt = \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{|y|\geq\frac{\delta}{h}} e^{-y^2} dy \leq \\
\frac{\epsilon}{2} + \frac{2hM}{\delta\sqrt{\pi}} \int_{|y|\geq\frac{\delta}{h}} |y| e^{-y^2} dy \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{4hM}{\delta\sqrt{\pi}} \int_0^\infty y e^{-y^2} dy = \frac{\epsilon}{2} + \frac{2hM}{\delta\sqrt{\pi}} < \epsilon
\end{aligned}$$

on hem fet servir el canvi de variables $y = (t-x)/h$ a la tercera igualtat, i que $1 \leq h|y|/\delta$ a la segona desigualtat. □ QED.

I arrel d'això ja tenim un cop més la demostració del Teorema d'Aproximació de Weierstraß:

Per $f \in \mathcal{C}([a,b])$, podem extendre-la a una funció fitada i uniformement contínua a $\mathbb{R}$. En particular, $\exists R > 0 : \forall |x| > R, f(x) = 0$. Sigui $\epsilon > 0$ i M tal que $|f(x)| < M \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Pel teorema anterior, $\exists h_0 > 0$:

$$|S_{h_0}(f)(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Com que $f(t) = 0 \quad \forall |t| > R$, la sèrie de potències de e^{-x^2} convergeix uniformement a $[-\frac{2R}{h_0}, \frac{2R}{h_0}]$. D'aquí treiem que $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\Big| \frac{1}{h_0\sqrt{\pi}} \Big(e^{-\frac{(t-x)^2}{h_0^2}} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (x-t)^{2n}}{k! h_0^{2n}} \Big) \Big| < \frac{\epsilon}{4RM}$$

$\forall |x| \leq R, \forall |t| \leq R \implies |x-t| \leq 2R$. Això implica que:

$$\Big|S_{h_0}(f)(x) - \frac{1}{h_0\sqrt{\pi}} \int_{-R}^{R} f(t) \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (x-t)^{2n}}{k! h_0^{2n}} dt\Big| < \frac{\epsilon}{2}$$

$\forall |x| \leq R$. Definim el polinomi P com:

$$P(x) := \frac{1}{h_0\sqrt{\pi}} \int_{-R}^{R} f(t) \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (x-t)^{2n}}{k! h_0^{2n}} dt$$

I P és un polinomi de grau com a molt 2N tal que:

$$|S_{h_0}(f)(x) - P(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$\forall |x| \leq R$. D'aquí concloem que $|f(x) - P(x)| < \epsilon \forall x \in [a, b]$. En altres paraules, P aproxima f. $\square$ QED.

2.5 Demostració de Lebesgue

Per fer les demostracions, seguirem la referència [2].

Lema 2.5.1: f contínua a $[0, 1]$. Llavors es pot aproximar mitjançant splines lineals.

Dem.: Prenem $\delta > 0$ tal que si $|u - v| < \delta \implies |f(u) - f(v)| < \frac{\epsilon}{2}$, per continuïtat uniforme. Prenem $x_i, i = 0 : n$, amb $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ amb $|x_{i+1} - x_i| < \delta$. Definim ϕ tal que $\phi(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0 : n$ i tal que ϕ és lineal entre les x_i's. Per tant si $x_i < x < x_{i+1}$, llavors:

$$\phi(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + f(x_i)$$

Llavors:

$$\begin{aligned}|f(x) - \phi(x)| &= \Big|f(x) - \Big(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + f(x_i)\Big)\Big| = \\ &\Big|f(x) - \Big(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}) + \Big(1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\Big) f(x_i)\Big)\Big| = \\ &\Big|\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}(f(x) - f(x_{i+1})) + \Big(1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\Big)(f(x) - f(x_i))\Big| \leq \\ &\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}|f(x) - f(x_{i+1})| + \Big(1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\Big)|f(x) - f(x_i)| < \\ &1 \cdot \frac{\epsilon}{2} + 1 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \ \square \text{ QED.}\end{aligned}$$

Definició 2.5.2: Per tot real a, definim $\phi_a(x) := \max(x - a, 0)$.

Lema 2.5.3: La funció $\phi(x)$ del lema 2.5.1 es pot escriure com:

$$\phi(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \phi_{x_i}(x)$$

Dem.: La funció $\phi(x)$ és clarament lineal per a $x \notin \{x_0, ..., x_n\}$. Tot el que necessitem saber és com trobar $a_0, ..., a_{n-1}$ de manera que $\phi(x_i) = f(i)$. Això és equivalent a resoldre el següent sistema:

$$\begin{gathered} \phi(x_0) = f(0) \\ \phi(x_1) = f(0) + a_0\phi_{x_0}(x_1) = f(x_1) \\ \vdots \\ \phi(x_n) = f(0) + a_0\phi_{x_0}(x_n) + ... + a_{n-1}\phi_{x_{n-1}}(x_n) = f(x_n) \end{gathered}$$

Aquest sistema pot ésser resolt recursivament, el que demostra el lema.
□ QED.

Observació: Els lemes 2.5.1 i 2.5.3 diuen que si podem aproximar $\phi_a(x)$ per polinomis, també ho podem fer amb f. Però $\phi_a(x) = \frac{1}{2}(|x-a| + (x-a))$, per això en realitat hem d'aproximar $|x-a|$ a $[0,1]$. Per això n'hi ha prou amb aproximar $|x|$ a un interval de la forma $[-A, A]$. Però si podem aproximar $|u|$ a $[-1,1]$, això és, si:

$$\Big||u| - p(u)\Big| < \frac{\epsilon}{A}, -1 \leq u \leq 1$$

llavors prenent $u = \frac{x}{A}$, i:

$$\Big||x| - Ap\Big(\frac{x}{A}\Big)\Big| < \epsilon, |x| < A.$$

Lema 2.5.4: $|x|$ és arbitràriament aproximable per polinomis a $|x| < 1$.

Dem.: Considerem la funció $g(t) := \sqrt{1-t}$ a $0 \leq t \leq 1$. Com sabem per Anàlisi real que les funcions de la forma $(1+at)^\alpha$ tenen per sèrie de Taylor:

$$(1+at)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^k t^k \tag{2.5}$$

particularitzem pel cas $a = -1, \alpha = 1/2$, i com la successió de la sèrie és absolutament convergent a 0, tenim convergència puntual amb radi de convergència 1. Com que la funció a la que convergeix és contínua a $t = 1$, llavors, pel Teorema d'Abel, convergeix uniformement a $[b, 1]\, \forall b > -1$, i en particular a $[0, 1]$.

Ara, com $|x| \leq 1$ implica $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$, llavors sabent que $|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$, llavors només cal engegar $T_n(1-x^2)$, on $T_n(t)$ és el polinomi de Taylor de grau n resultat de truncar (2.5), que és un altre polinomi. □ QED.

2.6 Demostració de Výborný

Aquí prendrem la funció f tal com surt a la introducció, i.e., definida a $[a, b]$, i seguirem l'article original de Výborný (2005) [6] per fer les demostracions.

Lema 2.6.1: Si $a < c - k < c \leq b$ llavors $\forall \eta > 0, \exists U(x) \in \mathbb{R}[x]$:

$$1 - \eta < U(x) \leq 1, a \leq x \leq c - k \tag{2.6}$$

$$0 \leq U(x) \leq 1, c - k < x < c \tag{2.7}$$

$$0 \leq U(x) \leq \eta, c \leq x \leq b \tag{2.8}$$

Dem.: Primer denotem $l := b - a$, i $d := c - \frac{k}{2}$. Primer cerquem un polinomi p amb valors entre 0 i $\frac{1}{2}$ a $[a, d]$ i entre $\frac{1}{2}$ i 1 a $[d, b]$. Això és fàcil:

$$p(x) = \frac{1}{2} + \frac{x - d}{2l} \tag{2.9}$$

Després definim:

$$U(x) := (1 - (p(x))^n)^{2^n} \tag{2.10}$$

per algun $n \in \mathbb{N}$ que escollirem més tard. Òbviament,

$$0 \leq U(x) \leq 1 \quad \forall a \leq x \leq b \tag{2.11}$$

Fent servir la desigualtat de Bernoulli, que és $(1+h)^n \geq 1+nh, h \geq -1, n \in \mathbb{N}$, on reemplacem n per 2^n, tenim que:

$$U(x) \geq 1 - (2p(x))^n \geq 1 - (2p(c-k))^n \quad \forall a \leq x \leq c - k \tag{2.12}$$

Per l'altra banda, tenim per $c \leq x \leq b$ que:

$$U(x) \leq \frac{1}{(2p(x))^n} U(x)(1 + (2p(x))^n) \leq \frac{1}{(2p(x))^n} (1 - p(x)^{2n})^{2^n} \leq \frac{1}{(2p(c))^n} \tag{2.13}$$

Des que $2p(c - k) < 1$ i $2p(c) > 1$, tenim que $\lim_{n\to\infty}(2p(c - k))^n = 0$ i $\lim_{n\to\infty}(2p(c))^{-n} = 0$. Finalment podem trobar $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(2p(c - k))^n < \eta \text{ i } \frac{1}{(2p(c))^n} < \eta \tag{2.14}$$

Ara les equacions (2.6), (2.7) i (2.8) vénen de les equacions (2.11), (2.12), (2.13) i (2.14). □ QED.

Dit això, demostrarem llavors el Teorema d'Aproximació de Weierstraß, seguint aquest lema:

Donat $\epsilon > 0$, sigui S_ϵ el conjunt de tots els $t \leq b$ tals que $\exists P_\epsilon :$ $|f(x) - P_\epsilon(x)| < \epsilon \quad \forall a \leq x \leq t$. Per continuïtat de f a a, $\exists t_0 > a :$ $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$. Per això f es pot aproximar per la constant $f(a)$ a $[a, t_0]$ i tenim que $S_\epsilon \neq \emptyset$. Sigui $s := sup(S_\epsilon)$. Clarament $a < s \leq b$. Per continuïtat de f a s, $\exists \delta > 0 : |f(x) - f(s)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ per $x \in B(s, \delta) \cap (-\infty, b]$. Per la definició de s, $\exists c : s - \delta < c \leq s$ i $s \in S_\epsilon$. Per tant, P_ϵ existeix per $a \leq x \leq c$. Sigui

$$m := max\{|f(x) - P_\epsilon(x)|; a \leq x \leq c\} \tag{2.15}$$

i M prou gran tal que:

$$M > |f(x) - P_\epsilon(x)| + |f(x) - f(s)| \quad \forall x \in [a, b] \tag{2.16}$$

Apliquem el lema per $c - k = s - \delta$ per trobar U amb $0 \leq \eta \leq 1$ prou petit com perquè:

$$m + M\eta < \epsilon \tag{2.17}$$

$$M\eta < \frac{2\epsilon}{3} \tag{2.18}$$

Això és possible perquè $m < \epsilon$. Ara definim:

$$P(x) := f(s) + (P_\epsilon(x) - f(s))U(x) \tag{2.19}$$

i això satisfà $|f(x) - P(x)| < \epsilon$ a $[a, b]$. Primer tenim que:

$$|f(x) - P(x)| \leq |f(x) - P_\epsilon(x)|U(x) + |f(x) - f(s)|(1 - U(x)) \tag{2.20}$$

Això segueix de (2.7) i (2.18) que a l'interval $[a, s - \delta]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq m + M\eta < \epsilon \tag{2.21}$$

A l'interval $[s - \delta, c]$ clarament:

$$|f(x) - P(x)| \leq \epsilon U(x) + \frac{\epsilon}{3}(1 - U(x)) < \epsilon \tag{2.22}$$

Finalment emprant (2.9), (2.19) i $|f(x) - f(s)| < \frac{\epsilon}{3}$ tenim que:

$$|f(x) - P(x)| \leq MU(x) + \frac{\epsilon}{3}(1 - U(x)) < \epsilon \tag{2.23}$$

a $[c, s + \delta] \cap [c, b]$. Això prova que $s = b$, altrament la desigualtat $|f(x) - P(x)| < \epsilon$ amb P definida a l'equació (2.9) se satisfaria a $[a, s+\delta]$, contràriament a la definició de s. Per això aquesta equació se satisfà a $[a, s] = [a, b]$, i la demostració s'ha completat. $\square$ QED.

Capítol 3

Teorema de Stone-Weierstraß

La idea d'aquesta part serà demostrar el Teorema de Stone-Weierstraß sense fer servir el Teorema d'Aproximació de Weierstraß, que fa servir polinomis.

Fins ara hem vist demostracions d'aquest teorema fent servir l'altre, ja que com les funcions dels reticles són contínues, llavors pel TAW es poden aproximar fent servir polinomis, cosa que hem vist a la part anterior.

No obstant això, més aviat tractarem demostracions alternatives sense l'ús de polinomis, i de fet, l'únic que serà el TAW és res més que el corol·lari del TSW específic per a polinomis.

3.1 Demostració fent servir compacitat

Ara seguirem el llibre [5].

Lema 3.1.1: Sigui $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ una subàlgebra unitària tancada, amb K compacte sobre $\mathbb{R}$. Llavors:

1. Si $f \in A$, i $f \geq 0$, llavors $\sqrt{f} \in A$.
2. Si $f \in A$, llavors $|f| \in A$.
3. A és un reticle.

Dem.: Per veure (1), cal considerar $0 \leq f \leq 1$, sense restricció, i després podem escriure $f = 1 - g$, amb $0 \leq g \leq 1$. Aplicant l'arrel quadrada als dos costats, podem aplicar el lema 2.5.4 per $t = g(x)$.

Per demostrar (2), només cal veure que $|f| = \sqrt{f^2}$.

Per veure (3), només cal veure aquestes dues igualtats:

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|), \quad f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)\ .\ \square \text{ QED.}$$

Ara demostrarem el TSW, amb la versió: si A és subàlgebra tancada que conté les constants i separa punts, llavors $A = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Sigui $A \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ una subàlgebra tancada que conté les constants i que separa punts de K. Llavors $\forall f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ demostrarem que $\exists g \in A : \|f - g\|_\infty < \epsilon$.

Considerem punts $s, t \in K$. Des que A separa punts, $\exists h \in A : h(s) \neq h(t)$. Llavors $\forall \lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$, definim $H : K \to \mathbb{R}$ tal que:

$$H(v) := \mu + (\lambda - \mu)\frac{h(v) - h(t)}{h(s) - h(t)} \quad \forall v \in K$$

Observem que $H \in A$ i $H(s) = \lambda, H(t) = \mu$. Per tant, per $s \neq t$, particularitzant que $\lambda = f(s), \mu = f(t), \exists f_{s,t} \in A$:

$$f_{s,t}(s) = f(s), f_{s,t}(t) = f(t)$$

Per tant, $f_{s,t}$ aproxima f a entorns de s i t. Ara fixem s i variem t, i definim:

$$U_t := \{v \in K : f_{s,t}(v) < f(v) + \epsilon\}$$

U_t és obert perquè és la antiimatge d'un conjunt obert. I també $t \in U_t$. Per això $\bigcup_{t \in K} U_t$ és un recobriment obert de K. Com K és compacte, $\exists t_1, ..., t_n$:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}$$

Sigui

$$h_s := \min_{i=1}^{n} f_{s,t_i}$$

Llavors, com A és subàlgebra unitària tancada, pel lema 3.1.1, tenim que $h_s \in A$ perquè A és reticle, i $h_s(s) = f(s), h(s) < f(s) + \epsilon$. Ara definim:

$$V_s := \{v \in K : h_s(v) > f(v) - \epsilon\}$$

Notem que V_s és obert, i pel mateix argument que abans, $\exists s_1, ..., s_m$:

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_{s_j}$$

Fent servir la mateixa idea, posem

$$g := \max_{j=1}^{m} h_{s_j}$$

Per tant, $g \in A$, i:

$$f - \epsilon < g < f + \epsilon$$

Això és:

$$\|f - g\|_\infty < \epsilon. \ \square \text{ QED.}$$

I d'aquí com a corol·laris surten directament que tant els polinomis en n variables com els polinomis trigonomètrics 2π-periòdics en $\mathbb{R}$ són densos en $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

3.2 Demostració de Brosowski i Deutsch

Aquí farem servir certes tècniques ja vistes al capítol dedicat a Výborný. Només que la notació al llibre que seguirem, [10], canvia lleugerament: aquí T és un espai topològic compacte, i $A \in \mathcal{C}(T)$ una subàlgebra que conté les constants i separa punts.

Lema 3.2.1: Sigui $t_0 \in T$ i U un entorn obert de t_0. Llavors $\exists t_0 \in V \subset U$ obert tal que $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A$:

- $0 \leq x(t) \leq 1 \quad \forall t \in T$
- $x(t) < \epsilon, \quad t \in V$
- $x(t) > 1 - \epsilon, \quad t \in T \backslash U$

Dem.: $\forall t \in U, \exists g_t \in A : g_t(t) \neq g_t(t_0)$. Per tant $h_t(s) := g_t(s) - g_t(t_0) \in A$, i $h_t(t) \neq h_t(t_0) = 0$. La funció $p_t := \frac{h_t^2}{\|h_t^2\|}$ és a A, $p_t(t_0) = 0, p_t(t) > 0$ i $0 \leq p_t \leq 1$.

Sigui $U_t := \{s \in T : p_t(s) > 0\}$. Per tant U_t és un entorn de t. Per compacitat de $T \backslash U$, $\exists t_1, ..., t_m : T \backslash U \subset \bigcup_{i=1}^m U_{t_i}$. Sigui $p := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_{t_i}$. Per tant $p \in A, 0 \leq p \leq 1, p(t_0) = 0, p > 0$ a $T \backslash U$.

Un altre cop fent servir la compacitat de $T \backslash U$, $\exists 0 < \delta < 1 : p \geq \delta$ a $T \backslash U$. Sigui $V := \{t \in T : p(t) < \frac{\delta}{2}\}$. Per tant és un entorn de t_0, i $V \subset U$.

Sigui k l'enter més petit tal que és més gran que $\frac{1}{\delta}$. Per tant $k - 1 \leq \frac{1}{\delta}$, que implica $k \leq \frac{1+\delta}{\delta} < 2/\delta \implies 1 < k\delta < 2$. Considerem $q_n(t) := (1 - p(t)^n)^{k^n}, n \in \mathbb{N}$. Llavors tenim:

$$q_n(t) = (1 - p(t)^n)^{k^n} \geq 1 - k^n p(t)^n = 1 - (kp(t))^n \geq 1 - \left(k\frac{\delta}{2}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

i ho fa uniformement en V, ja que no depèn de t. Si $t \in T \backslash U$, tenim que $kp(t) \geq k\delta > 1$. I per tant tenim:

$$q_n(t) = (1 - p(t)^n)^{k^n} = \frac{1}{(kp(t))^n}(1 - p(t)^n)^{k^n} \cdot k^n p(t)^n \leq$$
$$\frac{1}{(kp(t))^n}(1 - p(t)^n)^{k^n} \cdot (1 + k^n p(t)^n) \leq^{(a)} \frac{1}{(kp(t))^n}(1 - p(t)^n)^{k^n} \cdot$$
$$(1 + p(t)^n)^{k^n} = \frac{1}{(kp(t))^n}(1 - p(t)^{2n})^{k^n} \leq^{(b)} \frac{1}{(k\delta)^n} \xrightarrow{n \to \infty}{}^{(c)} 0$$

a $T \backslash U$, on a (a) hem aplicat Bernoulli, a (b) que $(1 - p(t)^{2n})^{k^n} \leq 1$ i $p(t) \geq \delta$ i a (c) que $k\delta > 1$. Si n és prou gran, és a dir, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tenim que $\forall n \geq n_0$:

$$0 \leq q_n(t) \leq 1 \text{ (sempre)}$$
$$q_n(t) < \epsilon \text{ a } T \backslash U$$
$$q_n(t) > 1 - \epsilon \text{ a } V$$

I llavors prenem $x(t) := 1 - q_n(t)$, i compleix que:

$$0 \leq x(t) \leq 1$$
$$x(t) < \epsilon \text{ a } V$$
$$x(t) > 1 - \epsilon \text{ a } T \backslash U$$

□ QED.

Lema 3.2.2: Siguin B i C dos subconjunts disjunts tancats de T. Per $0 < \epsilon < 1, \exists x \in A:$

- $0 \leq x(t) \leq 1, t \in T$
- $x(t) < \epsilon, t \in B$
- $x(t) > 1 - \epsilon, t \in C$

Dem.: Sigui $U := T \backslash C$. Per cada $t \in B$, escollim l'entorn V_t com al lema 3.2.1. $\exists t_1, ..., t_m \in B : B \subset \bigcup_{i=1}^m V_{t_i}$. Per la seva elecció, $\forall i \in [m], \exists x_i \in B$ amb $0 \leq x_i \leq 1, x_i < \epsilon/m$ a $V_{t_i}, x_i > 1 - \epsilon/m$ a $T \backslash U = C$. Per tant la funció $x := \prod_{i=1}^m x_i$ pertany a A, $0 \leq x \leq 1, x < \epsilon/m < \epsilon$ a $\bigcup_{i=1}^m V_{t_i} \supset B$, ja que les $x_i(t)$ són $< \epsilon/m$ a V_{t_i} i ≤ 1 a la resta de T, i emprant la desigualtat de Bernoulli, tenim que $x \geq (1 - \epsilon/m)^m \geq 1 - m\epsilon/m = 1 - \epsilon$ a C. □ QED.

Ara tornem al Teorema de Stone-Weierstraß. Siguin $f \in \mathcal{C}(T), \epsilon > 0$. Només cal veure que $\exists g \in A : \forall t \in T, |f(t) - g(t)| < 2\epsilon$. Podem suposar que $f \geq 0$ fent el canvi a $f + \|f\|$, i també $\epsilon < 1/3$. Escollim un enter n tal que $(n-1)\epsilon \geq \|f\|$. Per a $j = 0, ..., n$ definim els subconjunts:

$$B_j := \left\{ t \in T : f(t) \leq \left(j - \frac{1}{3}\right)\epsilon \right\}$$

$$C_j := \left\{ t \in T : f(t) \geq \left(j + \frac{1}{3}\right)\epsilon \right\}$$

Notem que B_j, C_j són subconjunts disjunts de T, $\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset ... \subset B_n = T$, i $C_0 \supset C_1 \supset ... \supset C_n = \emptyset$. El lema 3.2.2 implica que $\exists x_j \in A : 0 \leq x_j \leq 1, x_j < \epsilon/n$ a B_j, i $x_j > 1 - \epsilon/n$ a C_j.

Per tant la funció $g := \epsilon \sum_{i=0}^{n} x_i$ és a A, ja que és subàlgebra. $\forall t \in T, \exists j \geq 1 : t \in B_j \backslash B_{j-1}$, que implica:

$$\left(j - \frac{4}{3}\right)\epsilon < f(t) \leq \left(j - \frac{1}{3}\right)\epsilon, \text{ i}$$

$$t \in B_j \subset B_{j+1} \subset \cdots \implies x_i(t) < \epsilon/n \quad \forall i \geq j \tag{3.1}$$

També $t \in C_i$ per cada $i \leq j - 2$ que implica

$$x_i(t) > 1 - \epsilon/n \quad \forall i \leq j - 2 \tag{3.2}$$

Emprant (3.1) obtenim:

$$g(t) = \epsilon \sum_{i=0}^{j-1} x_i(t) + \epsilon \sum_{i=j}^{n} x_i(t) \leq$$
$$j\epsilon - (n - j + 1)\epsilon/n \leq j\epsilon + \epsilon^2 < (j + 1/3)\epsilon$$

I d'altra banda, per a $j \geq 2$, emprant (3.2) obtenim:

$$g(t) \geq \epsilon \sum_{i=0}^{j-2} x_i(t) \geq (j-1)\epsilon(1 - \epsilon/n) =$$
$$(j-1)\epsilon - ((j-1)/n)\epsilon^2 > (j-1)\epsilon - \epsilon^2 > (j - 4/3)\epsilon$$

La desigualtat $g(t) > (j - \frac{4}{3})\epsilon$ és òbvia per a $j = 1$. Per tant tenim:

$$|f(t) - g(t)| \leq \left(j + \frac{1}{3}\right)\epsilon - \left(j - \frac{4}{3}\right)\epsilon = \frac{5\epsilon}{3} < 2\epsilon$$

d'on hem fet servir $\epsilon(j - 4/3) < f(t) \leq (j - 1/3)\epsilon$, $\epsilon(j - 4/3) < g(t) < (j + 1/3)\epsilon$, i $t \in B_j$. $\square$ QED.

3.3 Demostració en espais mètrics

Tot seguint el llibre [17], procedirem amb una sèrie de lemes per passos. Aquí suposarem tota l'estona que X és un espai mètric compacte, i $A \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ és una subàlgebra que conté les constants i separa punts.

Lema 3.3.1: El màxim i mínim puntuals de diverses funcions a la clausura de la subàlgebra A es manté a la clausura.

Abans de demostrar aquest lema, demostrarem suposant-lo el TSW. N'hi ha dos passos:

1. Donada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), x \in X, \epsilon > 0, \exists g_x \in \bar{A} : g_x(x) = f(x), g_x(y) \leq f(y) + \epsilon \quad \forall y \in X$.

2. Fent servir compacitat, $\exists x_1, ..., x_N \in X : \phi(x) := \max_{i=1}^N \{g_{x_i}(x)\}$ satisfà $f(y) - \epsilon \leq \phi(y) \leq f(y) + \epsilon \quad \forall y \in X$. Per tant $\forall \epsilon > 0, \exists \phi \in \bar{A} : \|f - \phi\| \leq \epsilon \implies f \in \bar{A}$.

Dem.:

1. Donat $z \neq x, \in X$, sigui $h_z \in \bar{A}$ satisfent $h_z(x) = f(x)$ i $h_z(z) = f(z) + \epsilon/2$, de la propietat d'interpolació, per la proposició 1.3.3. Per continuïtat, $\exists z \in V_z \subset X : \forall y \in V_z, h_z(y) - f(y) \leq |h_z(y) - h_z(z)| + |h_z(z) - f(y)| \leq \epsilon/2 + |f(z) + \epsilon/2 - f(y)| \leq 2\epsilon$. Això defineix un recobriment obert $\{V_z\}_{z \in X}$ de X. Agafant un subrecobriment finit $\{V_{z_i}\}_{i=1}^N$ de X, pel lema 3.3.1, trobem la funció $g = \min_{i=1}^N \{h_{z_i}\}$ desitjada, i és a $\bar{A}$ i satisfà les condicions demanades.

2. Sigui $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \epsilon > 0, x \in X, g_x \in \bar{A}$ la funció del pas 1. Per continuïtat $\exists x \in U_x \subset X : g_x(y) \geq f(y) - \epsilon \forall y \in U_x$. Pel mateix argument d'abans, recobrim X amb un subrecobriment finit $\{U_{x_i}\}_{i=1}^N$. I la funció desitjada $\phi = \max_{i=1}^N \{g_{x_i}\} \in \bar{A}$ i satisfà $|\phi(y) - f(y)| < \epsilon$. $\square$ QED.

Ara podem emprar el teorema de Dini per poder demostrar aquest lema:

Pas 1: $\exists$ una seqüència de funcions $(u_n)_n$ de polinomis reals que aproximen $\sqrt{t}$ uniformement a $[0, 1]$.

Definim u_n per recurrència, posant $u_1 = 0$, i:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n(t)^2)$$

Podem veure que si calculem el límit d'aquesta successió, tenim que:

$$L(t) = L(t) + \frac{1}{2}(t - L(t)^2) \implies L(t) = \sqrt{t} \tag{3.3}$$

Demostrem per inducció que $u_{n+1} \geq u_n$ i $u_n(t) \leq \sqrt{t}$ a $[0,1]$. Se segueix de la relació recursiva que el primer fet se segueix del segon. Per l'altra banda,

$$(\sqrt{t}-u_{n+1}(t)) = (\sqrt{t}-u_n(t)) - \frac{1}{2}(t-u_n(t)^2) = (\sqrt{t}-u_n(t))\Big(1-\frac{1}{2}(\sqrt{t}+u_n(t))\Big)$$

amb la hipòtesi d'inducció que $\sqrt{t}-u_n(t) \geq 0$, per tant, $u_n(t) \leq \sqrt{t}$ i juntant les dues fórmules, surt que $\sqrt{t}+u_n(t) \leq 2\sqrt{t}$, i com que $1-\sqrt{t} \geq 0$ perquè t és definida a $[0,1]$, llavors el segon factor és positiu. Per tant tenim convergència puntual de u_n cap a $\sqrt{t}$, ja que tenim una successió creixent i fitada superiorment, pel que té límit puntual, i la convergència uniforme se segueix del teorema de Dini, ja que $\sqrt{t}$ és contínua a $[0,1]$.

Pas 2: Si $f \in \bar{A}$, llavors $|f| \in \bar{A}$.

Sigui $a := \|f\|_\infty$. La funció f^2/a^2 és a $\bar{A}$ des que és una àlgebra i pren valors a $[0,1]$. Si $u_n(t)$ són les funcions del pas 1, les composicions $u_n \circ (f^2/a^2)$ són a $\bar{A}$, i convergeixen uniformement a $|f|/a$.

Pas 3: Si $f, g \in A$, tenim que $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in \bar{A}$, ja que:

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|), \min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

Pas 4: El màxim i mínim puntuals de diverses funcions a $\bar{A}$ roman a $\bar{A}$: se segueix del pas 3, minimitzant des de quantitats finites de conjunts a un nombre finit de comparacions dos a dos. □ QED.

Corol·lari 3.3.2 (TSW): $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ és separable. Només cal agafar boles obertes de radi $1/n$ centrades a un punt qualsevol de X, i agafar-ne un nombre finit, per compacitat. □ QED.

3.4 TSW per espais mètrics totalment fitats

Per definir els següents conceptes, seguirem el llibre [18].

Definició 3.4.1: Si $f, g \in \mathcal{C}_u(X)$ (funcions uniformement contínues), amb X espai mètric totalment fitat, $\epsilon > 0$, $\vee, \wedge$ ja definides abans, i Φ un espai de funcions contínues, llavors la clausura uniforme $\mathcal{U}(\Phi)$ es defineix per:

$$U(g,f,\epsilon) :\Longleftrightarrow \forall x \in X, |g(x)-f(x)| \leq \epsilon$$

$$U(\Phi,f) :\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists g \in \Phi : U(g,f,\epsilon)$$

$$\mathcal{U}(\Phi) := \{f \in \mathcal{C}_u(X) : U(\Phi,f)\}$$

Obs.: Si Φ és subàlgebra, també ho és $\mathcal{U}(\Phi)$. I a més, si el primer ho és per $|.|$, també ho és el segon.

Per veure-ho, tenim clar per la desigualtat triangular que les combinacions lineals de funcions de $\mathcal{U}(\Phi)$ també hi son. Cal veure que el producte de funcions també hi és: si $|f_1| < M_1, |f_2| < M_2$, cosa que és certa, perquè X és compacte, tenim que:

$$|f_1 f_2 - g_1 g_2| \leq |f_1 f_2 - f_1 g_2| + |f_1 g_2 - g_1 g_2| < \frac{\epsilon}{2M_1} \cdot M_1 + \frac{\epsilon}{2M_2} \cdot M_2 = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

I si a més és tancat pel valor absolut, llavors tenint en compte que

$$\big||f| - |g|\big| < \epsilon \iff -\epsilon < |f| - |g| < \epsilon \implies |f| < |g| + \epsilon$$

tenim que:

$$-\epsilon < f - g < \epsilon \iff g - \epsilon < f < g + \epsilon \implies |f| < \max\{|g \pm \epsilon|\} \leq |g| + \epsilon$$

tal com volíem veure. I les operacions $\vee, \wedge$ se segueixen automàticament.

Per veure els dos següents lemes, seguirem el llibre [21].

Lema 3.4.2: Si Φ és tancat sota la suma i la multiplicació interna i per escalars, llavors $\mathcal{U}(\Phi)$ ho és sota $|.|, \vee, \wedge$.

Dem.: Siguin $H := \mathcal{U}(\Phi)$, i $f \in \Phi$. Clarament H és una subàlgebra, per l'observació anterior. Agafem $c > 0$ prou petit com perquè $\|cf\| \leq 1$. Sigui $\epsilon > 0$, i p el polinomi de la observació del lema 2.5.3. Per tant,

$$\big||cf(x)| - p(cf(x))\big| \leq \epsilon, \quad x \in X$$

Des que $p \circ (cf) \in H$, i ϵ és arbitrari, llavors $|cf| \in H$, per tant, $|f| \in H$. Les operacions de màxim i mínim se segueixen automàticament. $\square$ QED.

Lema 3.4.3: Si Φ és tancat sota la suma i la multiplicació interna i per escalars, i $f \in \mathcal{C}_u(X)$ és tal que $\forall x \in X, \exists c > 0 : |f(x)| \geq c$, llavors $1/f \in \mathcal{C}_u(X)$.

Dem.: Siguin $h \in H$ i $\lambda := h^2/\|h\|^2$. Sigui $0 < c := \inf\{|h(x)| : x \in X\}$. Llavors $c^2/\|h\|^2 \leq \lambda \leq 1$, per tant, $|1 - \lambda| \leq 1 - c^2/\|h\|^2 < 1$. D'aquí tenim la convergència uniforme de la sèrie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(1-\lambda)^n}{\|h\|^2} = \frac{h}{\|h\|^2(1 - (1 - \lambda))} = \frac{1}{h}$$

Des que cada terme de la sèrie pertany a H, i H és tancat, llavors $1/h \in H$. $\square$ QED.

Definició 3.4.4: Sigui $d_{x_0}(x) := d(x_0, x)$. Llavors

$$U_0(X) := \{d_{x_0} : x_0 \in X\}$$
$$U_0^*(X) := U_0(X) \cup \{\bar{1}\}$$

Corol·lari 3.4.5: Si $x_0, y_0 \in X$ són tals que $d(x_0, y_0) > 0$ llavors $1 \in \mathcal{U}(\mathcal{A}(U_0(X)))$.

Dem.: Si $x \in X$, llavors $0 < d(x_0, y_0) \leq d_{x_0}(x) + d_{y_0}(x) \in \mathcal{A}(U_0(X))$. Pel lema 3.4.3 tenim que $\frac{1}{d_{x_0}+d_{y_0}} \in \mathcal{U}(\mathcal{A}(U_0(X)))$. Per tant, $1 \in \mathcal{U}(\mathcal{A}(U_0(X)))$. □ QED.

Definició 3.4.6: Si $\mathbb{F}(X)$ denota les funcions reals en X, el conjunt de funcions Lipschitz $Lip(X)$ a (X, d) es defineix com:

$$Lip(X, k) := \{f \in \mathbb{F}(X) : \forall x, y \in X, |f(x) - f(y)| \leq kd(x, y)\}$$

$$Lip(X) := \bigcup_{k \geq 0} Lip(X, k)$$

Notem que aquest conjunt és contingut a les funcions uniformement contínues, conté $U_0(X)$ i les constants, i és tancat per la suma i la multiplicació interna i per constants. És fàcil de comprovar:

Si $x_0 \in X$, llavors $|d(x_0, x) - d(x_0, y)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$, per tant, $U_0(X) \subseteq Lip(X, 1)$. Clarament, les constants són contingudes a $Lip(X, k) \quad \forall k \geq 0$. Recordem que $f \cdot g = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$, i si $M_f > 0$ és una fita de f, és immediat veure que:

$$f \in Lip(X, k_1), g \in Lip(X, k_2) \implies f + g \in Lip(X, k_1 + k_2)$$
$$f \in Lip(X, k), \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in Lip(X, |\lambda| k)$$
$$f \in Lip(X, k) \implies f^2 \in Lip(X, 2M_f k). \quad \square \text{ QED.}$$

□ QED.

Lema 3.4.7: Si $\Phi = \mathcal{A}(U_0^*(X))$, llavors $Lip(X) \subseteq \mathcal{U}(\Phi)$.

Dem.: N'hi ha prou amb demostrar que $Lip(X, 1) \subseteq \mathcal{U}(\Phi)$, des que $f \in Lip(X, k)$ per cert $k > 0$, per tant $f/k \in Lip(X, 1)$, i tenim $\forall \epsilon > 0, \theta \in \Phi$,

$$U(\theta, \frac{1}{k} f, \frac{\epsilon}{k}) \implies U(k\theta, f, \epsilon)$$

Suposem després que $f \in Lip(X, 1), \epsilon > 0$. Trobem $g \in \mathcal{U}(\Phi)$ tal que $U(g, f, \epsilon)$, per tant, $f \in \mathcal{U}(\mathcal{U}(\Phi)) = \mathcal{U}(\Phi)$. Més específicament, si $\{z_1, ..., z_m\}$

és una $\epsilon/2$-aproximació de X, trobem $g \in \mathcal{U}(\Phi)$ tal que $g(z_i) = f(z_i) \quad \forall i = 1 : m$, i $|g(x) - g(z_i)| = |g(x) - f(z_i)| \leq \epsilon/2 \forall x \in X, z_i$ tal que $d(x, z_i) \leq \epsilon/2$. Conseqüentment,

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - g(z_i)| + |g(z_i) - f(z_i)| + |f(z_i) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + 0 + d(z_i, x) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Definim:

$$g := \bigwedge_{k=1}^{m} (\overline{f(z_k)} + d_{z_k})$$

Des que $\overline{f(z_k)} + d_{z_k} \in \Phi$, i des que pel lema 3.4.2 $\mathcal{U}(\Phi)$ és tancat respecte $\wedge$, llavors $g \in \mathcal{U}(\Phi)$. A més,

$$g(z_i) = \bigwedge_{k=1}^{m} (f(z_k) + d(z_k, z_i)) \leq f(z_i) + d(z_i, z_i) = f(z_i)$$

Per la desigualtat contrària suposem que $f(z_i) < g(z_i)$ i arribem a una contradicció. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, hom pot veure que $a \wedge b < c \implies a < c \vee b < c$. D'aquí surt que:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} (f(z_k) + d(z_k, z_i)) < f(z_i) \implies \exists j \in [m] : f(z_j) + d(z_j, z_i) < f(z_i)$$

$$\implies d(z_j, z_i) < f(z_i) - f(z_j) \leq |f(z_i) - f(z_j)| \leq d(z_j, z_i)$$

que és una contradicció. Fent servir la igualtat $g(z_i) = f(z_i)$ tenim que:

$$g(x) = \bigwedge_{k=1}^{m} (f(z_k) + d_{z_k}(x)) \leq f(z_i) + d_{z_i}(x) \implies$$

$$g(x) - g(z_i) \leq f(z_i) + d_{z_i}(x) - g(z_i) = f(z_i) + d_{z_i}(x) - f(z_i) = d_{z_i}(x) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (3.4)$$

Si $k \in [m]$, llavors $f(z_i) - f(z_k) \leq |f(z_i) - f(z_k)| \leq d(z_i, z_k) \leq d(z_i, x) + d(x, z_k)$, per tant,

$$\begin{aligned} \forall k \in [m], f(z_i) - d(z_i, x) \leq f(z_k) - d(z_k, x) &\implies \\ f(z_i) - d(z_i, x) \leq \bigwedge_{k=1}^{m} (f(z_k) + d(z_k, x)) &\iff \\ f(z_i) - \bigwedge_{k=1}^{m} (f(z_k) + d(z_k, x)) \leq d(z_i, x) &\implies \\ g(z_i) - g(x) \leq d(z_i, x) \implies g(z_i) - g(x) \leq \frac{\epsilon}{2} & \end{aligned} \quad (3.5)$$

De (3.4) i (3.5) surt que $|g(x) - g(z_i)| \leq \epsilon/2$. $\square$ QED.

Lema 3.4.8: Si $f \in \mathcal{C}_u(X), \epsilon > 0$, llavors $\exists \sigma > 0, g, g^* \in Lip(X, \sigma)$ tals que:

1. $\forall x \in X, \quad f(x) - \epsilon \leq g(x) \leq f(x) \leq g^*(x) \leq f(x) + \epsilon.$
2. $\forall e \in Lip(X, \sigma), \quad e \leq f \implies e \leq g.$
3. $\forall e^* \in Lip(X, \sigma), \quad f \leq e^* \implies g \leq e^*.$

Dem.: 1. Sigui ω_f un mòdul de continuïtat de f, i $M_f > 0$ una fita de f. Definim les funcions $h_x : X \to \mathbb{R}$ i $g : X \to \mathbb{R}$ per:

$$h_x := f + \sigma d_x, \text{ amb } \sigma := \frac{2M_f}{\omega_f(\epsilon)} > 0$$

$$g(x) := \inf\{h_x(y) : y \in X\}$$

$\forall x \in X$. Notem que $g(x)$ és ben definida ja que $h_x \in \mathcal{C}_u(X)$ i $\exists \inf\{h_x\}$. Primer vegem que $g \in Lip(X, \sigma)$. Si $x_1, x_2, y \in X$, llavors la desigualtat $d(x_1, y) \leq d(x_2, y) + d(x_1, x_2)$ implica que $f(y) + \sigma d(x_1, y) \leq (f(y) + \sigma d(x_2, y)) + d(x_1, x_2)$, d'aquí que $g(x_1) \leq (f(y) + \sigma d(x_2, y)) + \sigma d(x_1, x_2)$, per tant, $g(x_1) \leq g(x_2) + \sigma d(x_1, x_2)$. Amb la desigualtat $d(x_2, y) \leq d(x_1, y) + d(x_1, x_2)$ tenim que $g(x_2) \leq g(x_1) + \sigma d(x_1, x_2)$, i per tant, juntant-les, tenim que $|g(x_1) - g(x_2)| \leq \sigma d(x_1, x_2)$. Després provem que:

$$\forall x \in X, f(x) - \epsilon \leq g(x) \leq f(x)$$

Des que $f(x) = f(x) + \sigma d(x, x) = h_x(x) \geq \inf\{h_x(y) : y \in X\} = g(x) \quad \forall x \in X$, tenim que $g \leq f$. Per això fixem la x, i demostrem que $f(x) - \epsilon \not> g(x)$. Notem que si $A \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, llavors $b > \inf(A) \implies \exists a \in A : a < b$. Per tant,

$$f(x) - \epsilon > g(x) \iff f(x) - \epsilon > \inf\{f(y) + \sigma d(x, y) : y \in X\} \implies$$
$$\exists y \in X : f(x) - \epsilon > f(y) + \sigma d(x, y) \iff f(x) - f(y) > \epsilon + \sigma d(x, y)$$

Per aquest y demostrem que $d(x, y) \leq \omega_f(\epsilon)$. Si passa el contrari, tenim que:

$$2M_f \geq f(x) + M_f \geq f(x) - f(y) > \epsilon + 2M_f \frac{d(x, y)}{\omega_f(\epsilon)} > \epsilon + 2M_f > 2M_f$$

que és una contradicció. D'aquí, per la continuïtat uniforme de f, tenim que $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, per tant la contradicció $\epsilon > \epsilon$ s'assoleix, des que:

$$\epsilon \geq |f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y) > \epsilon + \sigma d(x, y) \geq \epsilon$$

Ara definim les funcions $h_x^* : X \to \mathbb{R}$ i $g^* : X \to \mathbb{R}$ per:

$$h_x^* := f - \sigma d_x, \quad g^*(x) := \sup\{h_x^*(y) : y \in X\}$$

$\forall x \in X, \sigma := \frac{2M_f}{\omega_f(\epsilon)}$. De manera semblant a g, obtenim que $g^* \in Lip(X, \sigma)$ i:

$$\forall x \in X, f(x) \leq g^*(x) \leq f(x) + \epsilon$$

2. Sigui $e \in Lip(X, \sigma)$ tal que $e \leq f$. Si fixem $x \in X$, llavors $\forall y \in X, e(x) - e(y) \leq |e(x) - e(y)| \leq \sigma d(x, y) \implies e(x) \leq e(y) + d(x, y) \leq f(x) + d(x, y) \implies e(x) \leq g(x)$.

3. Sigui $e^* \in Lip(X, \sigma)$ tal que $f \leq e^*$. Si fixem $x \in X$, llavors $\forall y \in X, e^*(y) - e^*(x) \leq |e^*(y) - e^*(x)| \leq \sigma d(x, y) \implies f(y) + d(x, y) \leq e^*(y) - \sigma d(x, y) \leq e^*(x) \implies g^*(x) \leq e^*(x)$. □ QED.

Proposició 3.4.9 (Teorema de McShane-Kirszbraun per espais mètrics totalment fitats): Si $\sigma > 0, A \subseteq X$ és local, i $f : A \to \mathbb{R} \in Lip(A, \sigma)$, llavors $\exists g, g^* \in Lip(X, \sigma) : g_{|A} = g^*_{|A} = f$ i $\forall e \in Lip(X, \sigma)$ tal que $e_{|A} = f$ tenim que $g^* \leq e \leq g$.

Dem.: Les funcions g, g^* definides per $g(x) := \inf\{f(a) + \sigma d(x, a) : a \in A\}$ i $g^*(x) := \sup\{f(a) - \sigma d(x, a) : a \in A\}, \forall x \in X$, són ben definides, i satisfan les propietats demanades. □ QED.

Corol·lari 3.4.10: $\mathcal{U}(Lip(X)) = \mathcal{C}_u(X)$.

Dem.: Si $\epsilon > 0$, llavors les funcions $g, g^* \in Lip(X, \sigma)$ del lema 3.4.8 satisfan $U(g, f, \epsilon), U(g^*, f, \epsilon)$, respectivament. □ QED.

Ara només ens cal demostrar el TSW per espais mètrics totalment fitats. Per això, només ens cal veure que si $\Phi = \mathcal{A}(U_0^*(X))$, llavors $\mathcal{C}_u(X) = \mathcal{U}(\Phi)$.

Primer demostrem que $\mathcal{C}_u(X) \subseteq \mathcal{U}(\Phi)$. Si $f \in \mathcal{C}_u(X), \epsilon > 0$, per tant pel corol·lari 3.4.10 $\exists h \in Lip(X) : U(h, f, \frac{\epsilon}{2})$, mentre que pel lema 3.4.6, $\exists g \in \Phi : U(g, h, \frac{\epsilon}{2})$. Per tant se satisfà $U(g, f, \epsilon)$. La inclusió contrària se segueix immediatament del fet que tots els elements de $\mathcal{U}(\Phi)$ són a $\mathcal{C}_u(X)$. □ QED.

Capítol 4

Generalitzacions

Aquí farem generalitzacions on el nostre conjunt de funcions A seguirà essent un espai vectorial, tot i que ja no cal ni que sigui una subàlgebra ni un reticle. Aquí se'ns planteja el següent problema: donat un espai normat de funcions X i una seqüència de funcions $(f_i)_i$ en ell, quan aquesta seqüència és fonamental en X, és a dir, $\forall g \in X, \forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ i una seqüència d'escalars $(c_i)_i$ tal que:

$$\left\| g - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \right\| < \epsilon \quad ??$$

Una pregunta que es va fer en Bernstein, que surt al llibre [8], és: donada una successió de valors positius $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quan les funcions $1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, x^{\lambda_3}, ...$ són fonamentals a $\mathcal{C}([0,1])$??

4.1 Teoremes de Müntz

En aquest apartat seguirem primer el llibre [15], i després el llibre [13].

Definició 4.1.1:

$$X_n := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k} : a_0, ..., a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$X := \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$$

Lema 4.1.2: Sigui $m > 0$. Llavors $d(x^m, X_n) \leq \prod_{k=1}^{n} |1 - \frac{m}{\lambda_k}|$.

Dem.: Podem suposar que $m \neq \lambda_n \quad \forall n$. Llavors prenem una successió de funcions $(P_n(x))_n$ tal que $P_0(x) = x^m$ i:

$$P_n(x) = (\lambda_n - m)x^{\lambda_n} \int_x^1 t^{-1-\lambda_n} P_{n-1}(t)dt \quad \forall n \geq 1$$

Per exemple,

$$P_1(x) = (\lambda_1 - m)x^{\lambda_1} \int_x^1 t^{-1-\lambda_1} P_0(t)dt = [-x^{\lambda_1} t^{m-\lambda_1}]_x^1 = x^m - x^{\lambda_1}$$

Per inducció, P_n és de la forma $x^m - \sum_{k=0}^n a_k x^{\lambda_k}$ per alguns escalars (a_k):

$$P_n(x) = (\lambda_n - m)x^{\lambda_n} \int_x^1 t^{-1-\lambda_n} P_{n-1}(t)dt =$$

$$(\lambda_n - m)x^{\lambda_n} \int_x^1 t^{-1-\lambda_n} \Big(t^m - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{\lambda_k}\Big)dt =$$

$$x^m - x^{\lambda_n} + (\lambda_n - m) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{\lambda_n - \lambda_k} (x^{\lambda_k} - x^{\lambda_n})$$

Finalment $\|P_0\| = 1$ i $\|P_n\| \leq |1 - \frac{m}{\lambda_n}| \|P_{n-1}\|$, perquè

$$|\lambda_n - m| x^{\lambda_n} \int_x^1 t^{-1-\lambda_n} dt = \frac{|\lambda_n - m|}{\lambda_n}(1 - x^{\lambda_n}) \leq \left|1 - \frac{m}{\lambda_n}\right|$$

Per tant,

$$d(x^m, X_n) \leq \|P_n\| \leq \prod_{k=1}^n \left|1 - \frac{m}{\lambda_n}\right|. \ \square \text{ QED.}$$

Definició 4.1.3: Determinant de Gram

$$G(f_1, ..., f_n) := \begin{vmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \dots & \langle f_1, f_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_n, f_1 \rangle & \dots & \langle f_n, f_n \rangle \end{vmatrix}$$

Lema 4.1.4 (lema de Gram): $g \notin F := span(f_1, ..., f_n)$. Llavors:

$$d_2(g, F)^2 = \frac{G(g, f_1, ..., f_n)}{G(f_1, ..., f_n)}$$

Dem.: Sigui $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$ la millor aproximació de g a F, on els f_i són base de F. Llavors $g - f$ és ortogonal a F, i tenim que $\langle f_i, g \rangle = \langle f_i, f \rangle$, i:

$$\sum_{i=1}^n a_i \langle f_i, f_j \rangle = \langle f_j, g \rangle, \ j = 1 : n$$

Com el sistema té una única solució, llavors hem de tenir que $G(f_1, ..., f_n) \neq 0$. Notant les propietats del producte escalar i multiplicant escalarment per g, tenim un sistema d'equacions lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & \langle g, f_1\rangle & \dots & \langle g, f_n\rangle \\ 0 & \langle f_1, f_1\rangle & \dots & \langle f_1, f_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle f_n, f_1\rangle & \dots & \langle f_n, f_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g, g\rangle \\ \langle f_1, g\rangle \\ \vdots \\ \langle f_n, g\rangle \end{pmatrix}$$

I d^2 es troba fent servir la regla de Cramer a la primera línia. □ QED.

Lema 4.1.5: Siguin $m, \lambda_n, n = 0, 1, 2, ...$ Per tant,

$$d_2(x^m, X_n) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{m - \lambda_k}{m + \lambda_k + 1}$$

Dem.: La demostració es basa merament en la fórmula del determinant de Cauchý:

$$\prod_{i,j=1}^{n} (a_i + b_j) \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}^{1:n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \tag{4.1}$$

Considerant les a_i, b_j com a variables, tenim polinomis als dos costats. I clarament ambdós s'anul·len quan $a_i = a_j$ o $b_i = b_j$ per alguns $i \neq j$. Però ambdós polinomis tenen grau $n - 1$ als dos costats amb cadascuna de les variables!! Per tant, el costat esquerre és un múltiple constant del costat dret. Per demostrar que aquesta constant ha d'ésser 1, escrivim el costat esquerre com:

$$\prod_{i\neq j}^{1:n} (a_i + b_j) \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_1+b_1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_1+b_1}{a_1+b_n} \\ \frac{a_2+b_2}{a_2+b_1} & 1 & \cdots & \frac{a_2+b_2}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n+b_n}{a_n+b_1} & \frac{a_n+b_n}{a_n+b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

I prenem els límits $b_i \to -a_i \, \forall i$. L'expressió tendeix a $\prod_{i\neq j}^{1:n} (a_i - a_j)$ tal com fa el costat dret de la fórmula (4.1). Ara, integrant, $\langle x^p, x^q\rangle = \frac{1}{p+q+1}$ per $p, q > -1/2$, i tenint en compte que $\lambda_i + \lambda_j + 1 = (\lambda_i + 1/2) + (\lambda_j + 1/2)$, per tant, agafant $a_i = \lambda_i + 1/2$, $b_j = \lambda_j + 1/2$, tenim que:

$$G(x^{\lambda_0}, ..., x^{\lambda_n}) = det\Big(\Big[\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + 1}\Big]_{i,j}\Big) = \frac{\prod_{i>j}^{1:n} (\lambda_i - \lambda_j)^2}{\prod_{i,j=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_j + 1)}$$

amb una fórmula semblant per $G(x^m, x^{\lambda_0}, ..., x^{\lambda_n})$, i apliquem el Lema de Gram. □ QED.

Teorema 4.1.6 (Primer teorema de Müntz): Considerem el conjunt de funcions $\{x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, ...\}$ on $-\frac{1}{2} < \lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. És fonamental amb mínims quadrats a $[0,1] \iff \sum_{n:\lambda_n\neq 0}^{1:\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$.

Dem.:

$(\implies)$ Podem suposar que $\lambda_n \geq 0$, ja que hi ha un nombre finit de negatives, per tant, no afectarà pas a la convergència de la sèrie. Pel contrarrecíproc, si la suma és convergent, llavors els productes $\prod_{k=1}^n |1-\frac{m}{\lambda_k}|$ i $\prod_{k=1}^n |1-\frac{(m+1)}{\lambda_k}|$ tendiran a un límit diferent de 0 per qualsevol m diferent de les λ_n's, ja que

$$\prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{m}{\lambda_k}\right| = \prod_{k=1}^{n} e^{\log|1-m/\lambda_k|} = e^{\sum_{k=1}^{n}\log(|1-m/\lambda_k|)} \text{ convergent } \iff \left|\sum_{k=1}^{n}\log\left(\left|1-m/\lambda_k\right|\right)\right| < \infty \iff \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{m}{\lambda_k}\right| < \infty \tag{4.2}$$

que també val per $\prod_{k=1}^n |1-\frac{(m+1)}{\lambda_k}|$, ja que la convergència no depèn de m. Per tant, $d_2(x^m, X_n) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. En particular, X no pot ésser dens a $L_2([0,1])$.

$(\Longleftarrow)$ Per $\lambda_n = n-1$ s'aplica el TAW i prou, ja que $n-1 > -\frac{1}{2}\forall n \geq 1$, i les funcions contínues són denses a L^2, perquè:

$$\|f-f_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies \int_0^1 (f-f_n)^2 dx \leq \int_0^1 \|f-f_n\|_\infty^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

També podríem aplicar (4.2) només canviant convergent per divergent (és a dir, tendeix a 0 o a $+\infty$), i canviar el $<$ per $=$, el que implicaria que $d_2(x^m, X_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. $\square$ QED.

A més hauríem d'afegir que X és dens a $\mathcal{C}([0,1])$, ja que només hem vist la seva densitat a $L_2([0,1])$. Suposem que $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1} = +\infty$, i sigui $m \geq 1$. Per tant,

$$\begin{aligned}\left|x^m - \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k}\right| &= \left|m\int_0^x t^{m-1}dt - \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_k \int_0^x t^{\lambda_k-1}dt\right| \\ &\leq \int_0^1 \left|mt^{m-1}dt - \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_k t^{\lambda_k-1}\right|dt \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 \left|mt^{m-1}dt - \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_k t^{\lambda_k-1}\right|^2 dt}\end{aligned}$$

on a l'última desigualtat hem fet servir Cauchý-Schwarz. Ara les funcions $x^{\lambda_k - 1}$ generen un espai dens a $L_2([0,1])$ perquè $\sum_{\lambda_k > 1} (\lambda_k - 1)^{-1} = +\infty$. Per tant, podem trobar les a_k tals que fan el costat dret de la desigualtat $< \epsilon$. I amb això queda demostrat el que volíem.

Lema 4.1.7: Si $\Omega^* := \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > -2\}$ i $(\lambda_n)_n$ és una successió de nombres positius tals que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ llavors $\exists f^* \in H(\Omega^*)$ fitada a $\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq -1\}$ i que s'anul·la només als punts $0, \lambda_n$.

Dem.: Per a cada $n \in \mathbb{N}$ definim:

$$f_n : \Omega^* \to \mathbb{C} \text{ com:}$$

$$f_n(z) = \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}$$

S'ha definit bé perquè el denominador no s'anul·la mai a Ω^*.

Sigui K un compacte dins Ω^*. Vegem que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ convergeix uniformement a K. Com K és compacte, $\exists M > 0$:

$$M \geq |2 + 2z| + |2 + z| \quad \forall z \in K$$

A més $\frac{1}{\lambda_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ja que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, i consegüentment $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Sigui $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, \lambda_n \geq 2M$. Llavors es verifica:

1. $|2 + 2z| \leq M$
2. $0 < \lambda_n - M < |2 + \lambda_n + z|$
3. $\frac{M}{\lambda_n - M} \leq \frac{2M}{\lambda_n}$

Per tant:

$$|1 - f_n(z)| = \frac{|2z + 2|}{|2 + \lambda_n + z|} \leq \frac{M}{\lambda_n - M} \leq \frac{2M}{\lambda_n} \quad \forall n \geq n_0, z \in K$$

I el criteri M de Weierstraß ens diu que $\sum_{n=n_0}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ convergeix uniformement a K, i per tant també ho fa $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$.

Ara podem definir la funció $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ com:

$$f^*(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}$$

i a més afirmar que $f^* \in H(\Omega^*)$, d'altra banda, si $z_0 = a + bi$, amb $a, b \in \mathbb{R}, a \geq -1$, llavors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\Big|\frac{\lambda_n - z_0}{2+\lambda_n+z_0}\Big| \leq 1 \iff (\lambda_n - a)^2 + b^2 \leq (2+\lambda_n+a)^2 + b^2 \iff$$
$$\lambda_n^2 - 2\lambda_n \leq 4 + 4\lambda_n + \lambda_n^2 + 4a + 2a\lambda_n \iff$$
$$0 \leq 4 + 6\lambda_n + 4a + 2a\lambda_n = 4(a+1) + 2\lambda_n(a+3)$$

Per tant, el seu producte és ≤ 1, i així mateix es demostra que $|\frac{z_0}{(2+z_0)^3}| \leq 1$, concloent amb $|f^*(z_0)| \leq 1$, i una altra conseqüència és que f^* només es cancel·la als punts 0 i λ_n, $n \in \mathbb{N}$. □ QED.

Lema 4.1.8: Sigui f^* com al lema 4.1.7. Existeix una mesura de Börel complexa μ_0 sobre $[0,1]$ tal que:

$$f^*(z) = \int_{[0,1]} t^z d\mu_0(t), z \in \Omega^+$$

Dem.: $f^*(z) = \frac{h(z)}{(z+2)^2}, z \in \Omega^*$, on $h(z) = \frac{z}{1+z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - z}{2+\lambda_n+z}$. Sigui $z \in \Omega^+ := \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ i $R \geq |z+1|+1$, com $f^* \in H(\Omega^*)$, per la Fórmula Integral de Cauchý que vam aprendre a Funcions de variable complexa, podem afirmar que:

$$f^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{l_R}\frac{f^*(w)}{w-z}dw + \int_{C_R}\frac{f^*(w)}{w-z}dw\Big) \tag{4.3}$$

On

$$l_R(s) := -1 - is, s \in [-R,R]; \quad C_R(t) := Re^{it} - 1, t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Ara, si $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, llavors:

$$\Big|\frac{f^*(C_R(t))iRe^{it}}{Re^{it} - 1 - z}\Big| = R\Big|\frac{h(C_R(t))}{(Re^{it}+1)^2(Re^{it}-1-z)}\Big| \leq$$
$$\frac{R}{(R-1)^2(R-|z-1|)} \leq \frac{R}{(R-1)^2}$$

Per tant,

$$\Big|\int_{C_R}\frac{f^*(w)}{w-z}dz\Big| \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{R}{(R-1)^2}dt = \frac{\pi R}{(R-1)^2} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

Per (4.3) es compleix que:

$$f^*(z) = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{l_R}\frac{f^*(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{f^*(-1-si)(-i)}{-1-si-z}ds =$$
$$\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{f^*(-1+si)}{1-si+z}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f^*(-1+si)}{1-si+z}ds$$

Per altra banda, per cada $s \in [-R, R]$ tenim que:

$$\int_0^1 t^{z-si} dt = \Big[\frac{t^{z-si+1}}{z-is+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{z-is+1};$$
$$f^*(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_0^1 \frac{t^{z-is} f^*(-1+si)}{2\pi} dt\Big) ds =$$
$$\int_0^1 t^z \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(-1+is) e^{-is\log(t)} ds\Big) dt$$

Definim $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ com $g(s) = f^*(-1+is)$, i tenim:

$$|g(s)| = \frac{|h(-1+is)|}{|(is+1)^2|} \leq \frac{1}{|is+1|^2} \leq \frac{1}{s^2+1}$$

Com $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2+1} ds < \infty$, tenim que $g \in L_1$ i també que la seva transformada de Fourier, G, és fitada a tot $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G(t) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} \frac{1}{s^2+1} ds; \\ |G(t)| = \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} \frac{1}{s^2+1} ds\Big| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\frac{e^{-ist}}{s^2+1}\Big| ds = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2+1} ds < \infty \end{aligned} \tag{4.4}$$

i a més també és contínua, pel teorema de continuïtat d'integrals depenents de paràmetres. Per tant, també és contínua la funció $P(t) = G(\log(t))$.

Definim

$$\mu(E) := \int_E \frac{P(t)}{2\pi} dt, E \in \Sigma_{t_{(0,1]}}$$

on $\Sigma_{t_{(0,1]}}$ és la menor σ-àlgebra de Börel a $(0, 1]$ que conté la seva topologia euclidiana subespai, μ és una mesura complexa a $(0, 1]$ que podem extendre a μ_0 en $[0, 1]$ obtenint finalment que:

$$f^*(z) = \int_0^1 t^z d\mu_0(t)$$

ja que si μ és una mesura de Börel positiva sobre un conjunt Y, $g^* \in L^1(Y)$, i:

$$\lambda(E) := \int_E g^* d\mu, \quad E \in \sigma\text{-àlgebra de Börel a } Y$$

llavors es té que λ és una mesura de Börel complexa sobre Y, i a més, $\forall f$ mesurable Börel,

$$\int_E f d\lambda = \int_E f g^* d\mu \ . \ \square \text{ QED.}$$

Teorema 4.1.4 (Segon teorema de Müntz, 1914): Sigui $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una successió de nombres positius diferents tals que $1 \leq \lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Per tant la seqüència de funcions $\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, x^{\lambda_3}, ...\}$ és fonamental a $\mathcal{C}([0,1]) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$.

Dem.:

($\Longrightarrow$) Fem el contrarrecíproc: Suposem que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$. Sigui $\lambda \neq 0, \lambda_n \forall n$ i definim f^* com al lema 4.1.7. Sabem que f^* no s'anul·la a λ, a més pel lema 4.1.8, es té la representació:

$$f^*(z) = \int_{[0,1]} t^z d\mu_0(t), z \in \Omega^+ \tag{4.5}$$

on μ_0 és una mesura de Börel complexa a $[0,1]$. Després, com μ_0 determina un funcional lineal a $\mathcal{C}[0,1]*$, el que per (4.5) no s'anul·la a t^{λ}, concloem que no pertany a l'adherència de l'espai vectorial generat per la seqüència de funcions.

($\Longleftarrow$) Per $\lambda_n = n$ s'aplica el TAW i prou, ja que $n \geq 1$. $\square$ QED.

4.2 Teorema de Wiener

El llibre [14] ens proporciona una demostració del Teorema Tauberià de Wiener, amb conceptes previs.

Lema 4.2.1: Sigui A un espai de funcions. L'espai A_0, aquelles funcions de A que tenen suport compacte, són denses a A.

Dem.: Tenint en compte que la transformada de Fourier és:

$$F(x) := \int_K e^{-itx} f(t) dt$$

i l'antitransformada de Fourier és:

$$f(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} F(x) dx$$

tenim que $f = 0 \iff F = 0$. Sigui $0 \neq F \in A_0$. Llavors tots els seus traslladats $F(x+a)$ també són a A_0, i també $e^{ita}F(t), a \in \mathbb{R}$. D'aquí si $G \in L_\infty$ és ortogonal a $T^{-1}(A_0)$, on $T(F)(x) := F(x+a)$, tenim que:

$$\int_{\mathbb{R}} G(x) \int_K e^{-it(x-a)} f(t) dt dx = \int_K \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{ita} G(x) f(t) dx dt =$$
$$\int_K \gamma(t) e^{ita} f(t) dt = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

D'aquí surt que $f(t)\gamma(t) = 0$ per quasi tota f i un conjunt numerable i dens de valors de a. Des que $f \neq 0$, això demostra que $G = 0$ μ-g.a. D'aquí que A_0 és dens a A. $\square$ QED.

Lema 4.2.2: Suposem que $F \in A$ i $G \in B_0$ (el conjunt A_0 de segones derivades de variació fitada). Per tant,

$$\|(F(x) - F(0))G(x/\epsilon)\|$$

tendeix a 0 quan $\epsilon \to 0$.

Dem.: $G(x/\epsilon)$ és la transformada de Fourier de $\epsilon g(\epsilon t)$. D'aquí que $(F(x) - F(0))G(x/\epsilon)$ és la transformada de:

$$\int f(s)\epsilon g(\epsilon(t-s))ds - \epsilon g(\epsilon t) \int f(s) ds$$

Amb el canvi de variables $t \to \epsilon t$ tenim com a norma:

$$\int dt \int |f(s)(g(t - \epsilon s) - g(t))| ds$$

Per convergència dominada, aquesta integral tendeix a 0 quan $\epsilon \to 0$. $\square$ QED.

Teorema 4.2.3 (Teorema Tauberià de Wiener, 1932): Sigui $f \in L_1(\mathbb{R})$. $\forall g \in L_1(\mathbb{R})$,
$\epsilon > 0, \exists (c_j)_j, (\lambda_j)_j \in \mathbb{R}$:

$$\left\| g(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j f(x - \lambda_j) \right\|_{L_1(\mathbb{R})} < \epsilon$$

si i només si

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(t) dt \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dem.:

$(\implies)$ Vegeu lema 4.2.1.

($\Longleftarrow$) Sigui $P(x)$ el spline lineal que val 1 a $|x| < 1$ i s'anul·la a $|x| > 2$. Considerem el quocient:

$$Q(x) := \frac{P(x/\epsilon)}{F(x)}$$

Notem que per suposició, $F(x) \neq 0 \quad \forall x$. Quan $P(x/\epsilon) \neq 0$ llavors $P(x/(2\epsilon)) = 1$ i podem reescriure $Q(x)$ com:

$$Q(x) = \frac{P(x/\epsilon)}{F(0) + P(x/(2\epsilon))(F(x) - F(0))}$$

Pel lema 4.2.2., la norma de:

$$G_\epsilon(x) = P(x/(2\epsilon))(F(x) - F(0))$$

tendeix a 0 quan $\epsilon \to 0$. D'aquí que si ϵ és prou petit, tenim que expandint per sèrie geomètrica,

$$P(x/\epsilon) = (F(x)/F(0)) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (G_\epsilon(x)/F(0))^n$$

on la sèrie convergeix, per això el cantó dret pertany a A. En altres paraules, $P(x/\epsilon) \in F(x)A$ quan ϵ és prou petit. Des que $|F(x)|$ té una fita inferior positiva a cada interval compacte, tots els traslladats $P(\frac{x+b}{\epsilon})$ de $P(x/\epsilon)$ pertanyen a FA amb b fitat i ϵ prou petit.

Ara $P(x/\epsilon) = 1$ a l'interval $|x| \leq \epsilon$ i una suma de traslladats adequats donarà 1 a qualsevol interval. D'aquí que a cada interval $|x| \leq N$ existeix una funció a FA que equival a 1 en aquest interval. Però això significa que qualsevol element de A_0 pertany a FA. I això prova el teorema. $\square$ QED.

4.3 Funcions que parteixen la unitat

Si bé vam definir els polinomis de Bernstein d'una funció f, ara amb l'ajuda de [19] definim la base de Bernstein per:

$$B_{k,n}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Definició 4.3.1: Un conjunt de funcions $g_k(x)$ es diu que parteixen la unitat si la seva suma és 1.

Lema 4.3.2: Els polinomis de la base de Bernstein es poden escriure recursivament com:

$$B_{k,n}(x) = (1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x)$$

Dem.:

$$(1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x) = (1-x)\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} + x\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} = \binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = B_{k,n}(x). \ \square \text{ QED.}$$

Lema 4.3.3: Els polinomis de la base de Bernstein parteixen la unitat.

Dem.: Només cal veure que:

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x)$$

I llavors iterativament, arribem a què $x + (1-x) = 1$. Expandint per la propietat del lema anterior, tenim que:

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n}((1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x)) = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) + x\sum_{k=1}^{n} B_{k-1,n-1}(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) + x\sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x)$$

d'on hem fet servir que $B_{n,n-1}(x) = B_{-1,n-1}(x) = 0$. $\square$ QED.

I llavors ens preguntem com a **conjectura** si podem **generalitzar el teorema de Bernstein canviant els polinomis de la base de Bernstein per una successió de funcions partició de la unitat** qualsevol definida a qualsevol interval tancat $[a, b]$, que sempre podrem reescalar a $[0, 1]$ mitjançant una transformació lineal si cal, amb unes condicions donades: si han d'ésser polinomis, si han de formar reticle, si han d'ésser base d'algun subespai vectorial, si cal que siguin diferenciables i fins a quin grau, etc. Per exemple, amb el teorema de Bernstein, a més de la partició de la unitat ens calia veure que la transformada de la funció x és idènticament x, i que la transformada de x^2 tendeix uniformement a x^2.

4.4 Aproximació per successions d'operadors lineals

Notem primer de tot que els polinomis de Bernstein són operadors lineals, ja que es pot comprovar fàcilment que $B_n(af+bg)(x) = aB_n(f)(x) + bB_n(g)(x)$. Però veurem el que passa si generalitzem aquest resultat a operadors lineals en general, i quines condicions cal que es compleixin. Per a això seguirem la referència [20].

Definició 4.4.1: Sigui $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval no compacte (el definirem així durant tota la secció). LLavors la funció pes és una funció $\rho : I \to [1, +\infty)$ diferenciable i creixent.

Definició 4.4.2:

$$B_\rho(I) := \{f : I \to \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \cdot \rho(x)\} \tag{4.6}$$

on $M > 0$ és una constant que depèn de f i ρ, però independent de x. Llavors $B_\rho(I)$ és un espai de Banach amb la norma:

$$\|f\|_\rho := \sup_{x \in I} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \tag{4.7}$$

Això ho podem veure fàcilment: si $(f_n)_n$ és de Cauchý, llavors $\sup_{x\in I} \frac{|f_n(x)-f_m(x)|}{\rho(x)}$ tendeix a 0 quan $x \to +\infty, n, m \to \infty$, i fitant inferiorment l'expressió per $\frac{\sup|f_n(x)-f_m(x)|}{\inf \rho(x)} \geq \sup|f_n(x) - f_m(x)|$, es veu fàcilment que f_n és de cauchý amb la norma del suprem, i per tant, també amb $\|\cdot\|_\rho$.

Llavors podem considerar el seu subconjunt continu $\mathcal{C}_\rho(I) := \mathcal{C}(I) \cap B_\rho(I)$. Sigui $(A_n : \mathcal{C}_\rho(I) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))_{n\geq 1}$ una seqüència d'operadors lineals definida a $\mathcal{C}_\rho(I)$. A [Gadjiev, A. D.] de la nostra referència, es demostra que A_n porta elements de $\mathcal{C}_\rho(I)$ a $B_\rho(I) \iff A_n(\rho) \in B_\rho(I)$.

Definició 4.4.3: Mòdul de continuïtat: $\phi : I \to J, J \subset \mathbb{R}$ difeomorfisme amb $\phi'(x) > 0 \quad \forall x \in I$.

$$\omega_\phi(f, \delta) := \sup\{|f(t) - f(x)| : t, x \in I, |\phi(t) - \phi(x)| \leq \delta\} \tag{4.8}$$

Ara cal preguntar-nos, per $f \in \mathcal{C}_\rho(I)$, quan passa que $\|A_n(f) - f\|_\rho \xrightarrow{n\to\infty} 0$...

Proposició 4.4.4: Sigui $f \in B(I), \delta > 0$. (no dem.)

1. $\omega_\phi(f, \delta) = \omega(f \circ \phi^{-1}, \delta)$, on ω és el mòdul de continuïtat usual.
2. Sigui $(\delta_n)_{n\geq 1}$ una successió de nombres reals positius amb límit 0. Per tant $f \circ \phi^{-1}$ és uniformement contínua a $J \iff \omega_\phi(f, \delta_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

3. $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|\phi(t)-\phi(x)|}{\delta}\right)\omega_\phi(f, \delta) \quad \forall t, x \in I.$

Teorema 4.4.5: Siguin $A_n : \mathcal{C}_\rho(I) \to B_\rho(I)$ operadors lineals positius que deixen les constants invariants i satisfan les condicions:

$$\sup_{x \in I}\{A_n(|\phi(t) - \phi(x)|)(x)\} = a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{4.9}$$

$$\sup_{x \in I} \frac{\{A_n(|\rho(t) - \rho(x)|)(x)\}}{\rho(x)} = b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{4.10}$$

Si $A_n(f)(x)$ és diferenciable amb continuïtat i $\exists K(f, \rho, n)$ constant tal que:

$$\frac{|(A_n(f))'(x)|}{\phi'(x)} \leq K(f, \rho, n) \cdot \rho(x) \quad \forall x \in I \tag{4.11}$$

i ϕ i ρ són tals que $\exists \alpha > 0$ constant:

$$\frac{\rho'(x)}{\phi'(x)} \leq \alpha \cdot \rho(x) \quad \forall x \in I \tag{4.12}$$

llavors els enunciats següents són equivalents:

1. $\|A_n(f) - f\|_\rho \xrightarrow{n\to\infty} 0.$
2. $\frac{f}{\rho} \circ \phi^{-1}$ és uniformement contínua a J.

A més, tenim que:

$$\|A_n(f) - f\|_\rho \leq b_n \cdot \|f\|_\rho + 2 \cdot \omega_\phi\Big(\frac{f}{\rho}, a_n\Big) \quad \forall n \geq 1 \tag{4.13}$$

Dem.: (2. $\implies$ 1.) Emprant la desigualtat 3 de la proposició 4.4.4, tenim per una funció $f \in \mathcal{C}_\rho(I)$:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| \leq \frac{|f(t)|}{\rho(t)} \cdot |\rho(t) - \rho(x)| + \rho(x) \cdot \Big|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \frac{f(x)}{\rho(x)}\Big| \leq \\ \|f\|_\rho \cdot |\rho(t) - \rho(x)| + \rho(x) \cdot \Big(1 + \frac{|\phi(t) - \phi(x)|}{\delta}\Big)\omega_\phi\Big(\frac{f}{\rho}, \delta\Big) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Aplicant els operadors lineals A_n a l'última desigualtat, obtenim que:

$$\begin{aligned} \frac{|A_n(f)(x) - f(x)|}{\rho(x)} \leq \|f\|_\rho \cdot \frac{A_n(|\rho(t) - \rho(x)|)(x)}{\rho(x)} + \\ \Big(1 + \frac{A_n(|\phi(t) - \phi(x)|)(x)}{\delta_n}\Big)\omega_\phi\Big(\frac{f}{\rho}, \delta_n\Big) \end{aligned} \tag{4.15}$$

que demostra la relació (4.13), ja que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; com que $\frac{f}{\rho} \circ \phi^{-1}$ és uniformement contínua a J, deduïm que $\lim_{n\to\infty} \omega_\phi\Big(\frac{f}{\rho}, a_n\Big) = 0$. I com que

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, llavors tenim que $\lim_{n\to\infty} \|A_n(f) - f\|_\rho = 0$.

(1. $\implies$ 2.) Per la relació:

$$\begin{aligned} \omega_\phi\Big(\frac{f}{\rho}, \delta_n\Big) \le \omega_\phi\Big(\frac{f - A_n(f)}{\rho}, \delta_n\Big) + \omega_\phi\Big(\frac{A_n(f)}{\rho}, \delta_n\Big) \le \\ \|f - A_n(f)\|_\rho + \omega_\phi\Big(\frac{A_n(f)}{\rho}, \delta_n\Big) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Només falta demostrar que $\omega_\phi\Big(\frac{A_n(f)}{\rho}, \delta_n\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Aplicant el Teorema del Valor Mig de Cauchý, $\exists c$ entre $x, t \in I$ tal que:

$$\phi'(c)\Big(\frac{A_n(f)(t)}{\rho(t)} - \frac{A_n(f)(x)}{\rho(x)}\Big) = \Big(\frac{A_n(f)}{\rho}\Big)'(c)(\phi(t) - \phi(x)) \tag{4.17}$$

Tenim que:

$$\omega_\phi\Big(\frac{A_n(f)}{\rho}, \delta_n\Big) = \sup_{t,x\in I \mid \phi(t)-\phi(x)\mid \le \delta_n} \Big|\frac{A_n(f)(t)}{\rho(t)} - \frac{A_n(f)(x)}{\rho(x)}\Big| \le \Big\|\frac{1}{\phi'}\cdot\Big(\frac{A_n(f)}{\rho}\Big)'\Big\|\cdot\delta_n \tag{4.18}$$

que implica $\omega_\phi\Big(\frac{A_n(f)}{\rho}, \delta_n\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, per una elecció adequada dels $\delta_n \to 0$, si:

$$\Big\|\frac{1}{\phi'} \cdot \Big(\frac{A_n(f)}{\rho}\Big)'\Big\| < \infty \tag{4.19}$$

Però $\forall f \in \mathcal{C}_\rho(I), n \ge 1$,

$$\begin{aligned} \Big\|\frac{1}{\phi'} \cdot \Big(\frac{A_n(f)}{\rho}\Big)'\Big\| = \Big\|\frac{1}{\phi'} \cdot \Big(\frac{(A_n(f))'}{\rho} - \frac{A_n(f)\cdot\rho'}{\rho^2}\Big)\Big\| \le \\ \Big\|\frac{(A_n(f))'}{\rho\cdot\phi'}\Big\| + \|f\|_\rho \cdot \|A_n(\rho)\|_\rho \cdot \Big\|\frac{\rho'}{\rho\cdot\phi'}\Big\| < \infty \end{aligned} \tag{4.20}$$

per les relacions (4.11) i (4.12). $\square$ QED.

Observació 4.4.6: La funció ϕ és fortament relacionada amb la seqüència d'operadors lineals. Es pot obtenir així: escollim θ tal que:

$$\theta'(x)\sqrt{A_n((t-x)^2)(x)} \le K_n \tag{4.21}$$

on K_n és una constant que no depèn de x i tal que θ satisfà les condicions (4.11) i (4.12). Aleshores, per la implicació 1. $\implies$ 2. del teorema 4.4.5 ens dóna que $\frac{f}{\rho} \circ \theta^{-1}$ és uniformement contínua. Però a la major part dels casos, θ^{-1}

té una forma complicada i la relació (4.9) costa de demostrar. Per solventar-ho, considerem ϕ tal que $\theta \circ \phi^{-1}$ és uniformement contínua. I per tant tenim que $\frac{f}{\rho} \circ \phi^{-1}$ és una funció uniformement contínua.

Observació 4.4.7: La classe maximal de pesos és $\rho(x) = e^{\alpha\phi(x)}$. A l'hora de demostrar el resultat del teorema per aquest pes, primer demostrem la desigualtat $A_n(\rho)(x) \leq C_\alpha \rho(x) \forall x \in I, \alpha > 0$, on $C_\alpha > 0$ és una constant independent de x. Ara cal demostrar la relació:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \{A_n(|\phi(t) - \phi(x)|^2)(x)\} = 0 \tag{4.22}$$

Fent servir la desigualtat de Cauchý-Schwarz per operadors lineals positius, tenim aquesta convergència de la successió:

$$a_n := \sup_{x\in I} \{A_n(|\phi(t) - \phi(x)|)(x)\} \leq \sup_{x\in I} \{\sqrt{A_n(|\phi(t) - \phi(x)|^2)(x)}\} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{4.23}$$

Emprant la desigualtat de mitjanes geomètrica-logarítmica-aritmètica:

$$\sqrt{u \cdot v} \leq \frac{u - v}{\log(u) - \log(v)} < \frac{u + v}{2}, 0 < v < u \tag{4.24}$$

obtenim:

$$|e^{\alpha\phi(t)} - e^{\alpha\phi(x)}| \leq \frac{e^{\alpha\phi(t)} + e^{\alpha\phi(x)}}{2} \cdot \alpha|\phi(t) - \phi(x)|, t, x, \in I \tag{4.25}$$

i

$$\begin{aligned} b_n = \sup_{x\in I} \left\{ \frac{A_n(|\rho(t) - \rho(x)|)(x)}{\rho(x)} \right\} \leq \\ \sup_{x\in I} \left\{ \frac{\alpha}{2} \frac{\sqrt{A_n(|\rho(t) - \rho(x)|^2)(x)}}{\rho(x)} \sqrt{A_n(|\phi(t) - \phi(x)|^2)(x)} \right\} \leq \\ \sup_{x\in I} \left\{ \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{S_n(\rho^2)(x)}{\rho(x)^2} + 2\frac{S_n(\rho)(x)}{\rho(x)} + 1} \sqrt{A_n(|\phi(t) - \phi(x)|^2)(x)} \right\} \leq \\ \frac{\alpha}{2} \sqrt{C_{2\alpha} + 2C_\alpha + 1} \cdot \sup_{x\in I} \{\sqrt{A_n(|\phi(t) - \phi(x)|^2)(x)}\} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Si (4.22) és cert, llavors b_n tendeix a 0, i per obtenir el resultat del teorema 4.4.5 cal demostrar (4.11).

Lema 4.4.8: $\forall \alpha > 0, \rho(x) = e^{\alpha\sqrt{x}}$, els operadors de Szász-Mirakjan definits per:

$$S_n(f)(x) := e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\Big(\frac{k}{n}\Big), x\in[0,+\infty) \tag{4.27}$$

porten $\mathcal{C}_\rho([0,+\infty))$ a ell mateix.

Dem.: Notem que $S_n(\rho)(x)$ existeix per $x\geq 0$. Això és cert perquè

$$S_n(\rho)(x) := e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}e^{\alpha\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}} \leq e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}e^{\alpha\frac{k}{\sqrt{n}}} = e^{nxe^{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}-nx} \tag{4.28}$$

Perquè $S_n(f)$ convergeix uniformement vers f a $[0,1]$, tenim que $S_n(\rho)(x)\leq C_{1,\alpha}\cdot\rho(x)\,\forall x\in[0,1]$. Anem a demostrar llavors que $S_n(\rho)(x)\leq C_{2,\alpha}\cdot\rho(x)\,\forall x\geq 1$:

$$\begin{gathered}\frac{S_n(\rho)(x)}{\rho(x)} = e^{-nx}\sum_{k>nx}\frac{(nx)^k}{k!}e^{\alpha(\sqrt{\frac{k}{n}}-\sqrt{x})} + e^{-nx}\sum_{k\leq nx}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{e^{\alpha\sqrt{\frac{k}{n}}}}{e^{\alpha\sqrt{x}}} \leq \\ e^{-nx}\sum_{k>nx}\frac{(nx)^k}{k!}e^{\frac{\alpha}{\sqrt{x}}(\frac{k}{n}-x)} + e^{-nx}\sum_{k\leq nx}\frac{(nx)^k}{k!} \leq e^{nx(e^{\frac{\alpha}{n\sqrt{x}}}-1)-\alpha\frac{x}{\sqrt{x}}}+1\end{gathered} \tag{4.29}$$

Fent servir la desigualtat $e^t-1\leq te^t$ tenim per $x\geq 1, n\geq 1$ que:

$$\frac{S_n(\rho)(x)}{\rho(x)} \leq e^{nx\frac{\alpha}{n\sqrt{x}}e^{\frac{\alpha}{n\sqrt{x}}}-\alpha\frac{x}{\sqrt{x}}}+1 \leq e^{\alpha\sqrt{x}\frac{\alpha}{n\sqrt{x}}e^{\frac{\alpha}{n\sqrt{x}}}}+1 \leq e^{\alpha^2e^{\alpha}}+1 =: C_\alpha \tag{4.30}$$

Notem que C_α depèn de α però no pas de n. $\square$ QED.

Corol·lari 4.4.9: Per $\alpha>0, \rho(x)=e^{\alpha\sqrt{x}}$, els operadors de Szász-Mirakjan $S_\rho:\mathcal{C}_\rho([0,+\infty))\to\mathcal{C}_\rho([0,+\infty))$ tenen la propietat que:

$$\|S_n(f)-f\|_\rho \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{4.31}$$

$\iff f(x^2)e^{\alpha x}$ és uniformement contínua a $[0,+\infty)$.

A més, per $f\in\mathcal{C}_\rho([0,+\infty))$ tenim que:

$$\|S_n(f)-f\|_\rho \leq \|f\|_\rho\cdot\frac{\alpha C}{\sqrt{n}} + 2\cdot\omega\Big(f(t^2)e^{\alpha t},\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \quad \forall n\geq 1 \tag{4.32}$$

on

$$C := \sup_{n\in\mathbb{N}}(1/2)\sqrt{\|S_n(\rho^2)\|_{\rho^2}+2\|S_n(\rho)\|_\rho+1} \tag{4.33}$$

és una constant que només depèn de α.

Dem.: Fixem $\phi(x) = \sqrt{x}$. La funció $\rho(x) = e^{\alpha\sqrt{x}}$ satisfà la relació (4.12) amb igualtat.

Tenim les relacions $S_n(1)(x) = 1, S_n((t-x)^2)(x) = x/n$. Ara provem la relació (4.22):

$$\begin{aligned}\sup_{x\geq 0} S_n(|\phi(t)-\phi(x)|^2)(x) = \sup_{x\geq 0} S_n\Big(\frac{|t-x|^2}{(\sqrt{t}+\sqrt{x})^2}\Big)(x) \leq \\ \sup_{x\geq 0}\frac{S_n(|t-x|^2)(x)}{x} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned} \tag{4.34}$$

Per a una funció $f \in \mathcal{C}_\rho(I)$ la derivada $(S_n(f))'(x)$ satisfà:

$$\begin{aligned}|(S_n(f))'(x)| = \Big|\frac{n}{x}\sum_{k=0}^{\infty} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big(\frac{k}{n}-x\Big)e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\Big| \leq \\ \frac{n}{x}\|f\|_\rho S_n(\rho(t)|t-x|)(x) \leq \sqrt{C_{2\alpha}}\|f\|_\rho \rho(x)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x}}\end{aligned} \tag{4.35}$$

perquè

$$\begin{aligned}S_n(\rho(t)|t-x|)(x) \leq \sqrt{S_n(\rho(t)^2)(x)}\cdot\sqrt{S_n((t-x)^2)(x)} \leq \\ \sqrt{C_{2\alpha}}\rho(x)\sqrt{\frac{x}{n}}\end{aligned} \tag{4.36}$$

i obtenim

$$\frac{|(S_n(f))'(x)|}{\phi'(x)} \leq C_{n,f,\alpha}\rho(x)\forall x \geq 0 \tag{4.37}$$

Per tant, la relació (4.11) s'ha complert. □ QED.

Lema 4.4.10: $\forall\alpha > 0, \rho(x) = (1+x)^\alpha$, els operadors de Baskakov definits per

$$V_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}f\Big(\frac{k}{n}\Big), x \geq 0 \tag{4.38}$$

porten $\mathcal{C}_\rho([0,+\infty))$ a ell mateix.

Dem.: Llegint la referència [Becker, M] dins la nostra referència, trobem que $V_n(1+t^N)(x) \leq C_1(1+x^N)\,\forall x \geq 0, N \in \mathbb{N}$. D'aquí deduïm que

$$V_n((1+t)^m)(x) \leq C_2 V_n(1+t^m)(x) \leq C_3(1+x^m) \leq C_3(1+x)^m \quad \forall x \geq 0, m \in \mathbb{N} \tag{4.39}$$

Ara demostrem que per $\beta \in [0,1)$, tenim que $V_n((1+t)^\beta)(x) \leq C_4(1+x)^\beta$. Emprant la desigualtat $\log(1+t) \leq t, t > -1$, obtenim:

$$\frac{V_n((1+t)^\beta)(x)}{(1+x)^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} e^{\beta(\log(1+\frac{k}{n})-\log(1+x))} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} e^{\beta \log\left(1+\frac{\frac{k}{n}-x}{1+x}\right)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} e^{\beta \frac{\frac{k}{n}-x}{1+x}} = (1-x(e^{\frac{\beta}{n(1+x)}}-1))^{-n} \cdot e^{\frac{-\beta x}{1+x}} \tag{4.40}$$

L'última expressió està ben definida $\forall x \geq 0, n \geq 1$ perquè

$$1 - x(e^{\frac{\beta}{n(1+x)}} - 1) \geq 1 - \lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{\beta}{n(1+x)}} - 1) = 1 - \frac{\beta}{n} > 0 \tag{4.41}$$

Degut a la desigualtat

$$\sup_{x \geq 0}\{(1-x(e^{\frac{\beta}{n(1+x)}}-1))^{-n} \cdot e^{\frac{-\beta x}{1+x}}\} \leq \left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-n} \cdot 1 \leq \frac{1}{1-\beta} \tag{4.42}$$

deduïm que $V_n((1+t)^\beta)(x) \leq C_4(1+x)^\beta \quad \forall x \geq 0$, on C_4 és una constant que no depèn ni de x ni de n.

Per $\alpha > 0$, escollim $m = [2\alpha] \in \mathbb{N}, \beta = 2\alpha - m \in [0,1)$. Fent servir la desigualtat de Cauchý-Schwarz, tenim que:

$$V_n((1+t)^\alpha)(x) = V_n((1+t)^{\frac{m}{2}} \cdot (1+t)^{\frac{\beta}{2}})(x) \leq \sqrt{V_n((1+t)^m)(x) \cdot V_n((1+t)^\beta)(x)} \leq \sqrt{C_3(1+x)^m \cdot C_4(1+x)^\beta} = C_5(1+x)^\alpha \tag{4.43}$$

que prova que $V_n(\rho) \in \mathcal{C}_\rho([0,+\infty))$. □ QED.

Corol·lari 4.4.11: Per a un nombre real $\alpha > 0, \rho(x) = (1+x)^\alpha$ els operadors de Baskakov V_n del lema anterior tenen la propietat de què:

$$\|V_n(f) - f\|_\rho \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{4.44}$$

$\iff$ $f(e^x - 1)e^{-\alpha x}$ és uniformement contínua a $[0, +\infty)$. A més, per $f \in \mathcal{C}_\rho([0, +\infty))$ i per $n \geq 2$ tenim que:

$$\|V_n(f) - f\|_\rho \leq \|f\|_\rho \cdot \frac{\alpha C}{\sqrt{n-1}} + 2 \cdot \omega\Big(f(e^t - 1)e^{-\alpha t}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\Big) \tag{4.45}$$

Dem.: Fixant $\phi(x) = \log(1+x)$, la funció $\rho(x) = (1+x)^\alpha$ satisfà la relació 4.13 amb igualtat. Tenim les relacions $V_n(1)(x) = 1, V_n(t)(x) = x, V_n((t - x)^2)(x) = x(1+x)/n$. Ara demostrem la relació (4.22). Emprant la desigualtat (4.24), tenim que:

$$\begin{aligned} |\phi(t) - \phi(x)| = |\log(1+t) - \log(1+x)| \leq \\ \frac{|t-x|^2}{(1+t)(1+x)} = \Big|\sqrt{\frac{1+t}{1+x}} - \frac{1+x}{1+t}\Big|^2 \end{aligned} \tag{4.46}$$

I emprant el fet que:

$$\begin{aligned} V_n\Big(\frac{1}{1+t}\Big)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \cdot \frac{n}{n+k} \leq \\ \frac{n}{(n-1)(1+x)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n-1+k}} = \frac{n}{(n-1)(1+x)} \end{aligned} \tag{4.47}$$

obtenim:

$$\begin{aligned} V_n(|\phi(t) - \phi(x)|^2)(x) \leq \frac{V_n(1+t)(x)}{1+x} - 2V_n(1)(x) + (1+x)V_n\Big(\frac{1}{1+t}\Big)(x) \leq \\ 1 - 2 + \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1}, \quad \forall n \geq 2 \end{aligned} \tag{4.48}$$

La derivada $(V_n(f))'$ verifica la relació:

$$\begin{aligned} |(V_n(f))'| = \Big|\frac{n}{x(1+x)} \sum_{k=0}^{\infty} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big(x - \frac{k}{n}\Big) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\Big| \leq \\ \frac{n}{x(1+x)}\|f\|_\rho \cdot V_n(\rho(t)|t-x|)(x) \leq C_1\|f\|_\rho \rho(x) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}} \end{aligned} \tag{4.49}$$

perquè:

$$V_n(\rho(t)|t-x|)(x) \leq \sqrt{V_n(\rho(t)^2)(x)} \cdot \sqrt{V_n((t-x)^2)(x)} \leq C_1 \rho(x) \sqrt{\frac{x(x+1)}{n}} \tag{4.50}$$

Llavors obtenim:

$$\frac{|(V_n(f))'(x)|}{\theta'(x)} \leq C_2\rho(x) \quad \forall x \geq 0 \tag{4.51}$$

on

$$\theta(x) = \log\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(1-x)}\right) \tag{4.52}$$

La desigualtat

$$\frac{\rho'(x)}{\theta'(x)} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}\sqrt{x(1+x)} \leq \alpha \cdot \rho(x) \tag{4.53}$$

demostra la relació (4.12) per la funció θ en comptes de per la ϕ. Fent servir el fet que:

$$(\theta \circ \phi^{-1})(x) = \log\left(e^x - \frac{1}{2} + \sqrt{(e^x-1)e^x}\right) \tag{4.54}$$

és una funció uniformement contínua a $[0, +\infty)$ (això és cert perquè és una funció contínua tal que $(\theta \circ \phi^{-1})(x) - x$ té un límit finit a l'infinit), i fent servir el teorema 4.4.5 i les observacions 4.4.6 i 4.4.7, s'ha completat la demostració del corol·lari. $\square$ QED.

Capítol 5

Aplicacions dels teoremes

5.1 Aplicacions a xarxes neuronals

La major part del que apareix en endavant se seguirà del llibre [11].

Teorema 5.1.1: Sigui $D \subset \mathbb{R}^N$ compacte, i

$$\mathcal{F} := \Big\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : f(\vec{x}) = \sum_{m=1}^{M} w_m \exp\Big(- \sum_{n=1}^{N} w_{mn} x_n \Big) : w_m, w_{mn} \in \mathbb{R} \Big\} \tag{5.1}$$

Per tant $\mathcal{F}$ és dens a $L_p(D), 1 \leq p < \infty$.

Dem.: Siguin f, g funcions a $\mathcal{F}$, on f es defineix com a (5.1), i:

$$g(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{K} w_k \exp\Big(- \sum_{n=1}^{N} w_{kn} x_n \Big)$$

Per tant fg es pot expressar com una suma:

$$(fg)(\vec{x}) = \sum_{l=1}^{L} w_l \exp\Big(- \sum_{n=1}^{N} w_{ln} x_n \Big)$$

on $w_l = w_m w_k$ i $w_{ln} = w_{mn} w_{kn}$. Per tant, $fg \in \mathcal{F}$, i la xarxa satisfà TSW. Per tant, com que és dens a $\mathcal{C}(D)$ per Stone-Weierstraß, i aquest conjunt és dens a $L_p(D), 1 \leq p < \infty$, s'aplica la transitivitat de la densitat, i surt la densitat final. $\square$ QED.

Aquest teorema també es pot generalitzar a casos de funcions de les menes:

$$\mathcal{F} := \Big\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : f(\vec{x}) = \sum_{m=1}^{M} w_m cosig\Big(-\sum_{n=1}^{N} w_{mn} x_n + \theta_m \Big) : \\ w_m, w_{mn}, \theta_m \in \mathbb{R}, \theta_m \geq 0 \Big\}$$

$$\text{on } cosig(x) := \left\{ \begin{array}{c} 0, x \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{1+\cos(2\pi x)}{2}, -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{array} \right\};$$

$$\mathcal{F} := \Big\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : f(\vec{x}) = \sum_{m=1}^{M} w_m \prod_{n=1}^{N} (1 + x_n)^{w_{mn}} : w_m, w_{mn} \in \mathbb{R} \Big\};$$

$$\mathcal{F} := \Big\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : f(\vec{x}) = \sum_{m=1}^{M} w_m \prod_{n=1}^{N} g(x_n)^{w_{mn}} : w_m, w_{mn} \in \mathbb{R}, \\ g \in \mathcal{C}([0,1]) \text{ invertible}, g(0) = 1 \Big\};$$

$$\mathcal{F} := \Big\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : f(\vec{x}) = \sum_{m=1}^{M} w_m \Big(1 + \sum_{k=1}^{K} \exp\Big(-\sum_{n=1}^{N} w_{mkn} x_n \Big) \Big)^{-1} : \\ w_m, w_{mkn} \in \mathbb{R} \Big\};$$

etc...

Una xarxa neuronal, o estructura d'arbre, on diverses neurones alimenten a una de següent, és una arquitectura genèrica de xarxes que satisfan el Teorema de Stone-Weierstraß. La podem interpretar per un conjunt $\mathcal{F}$ definit com els d'abans.

La xarxa neuronal té una o més condicions amagades satisfetes per una neurona de sortida. Suposem que allà n'hi ha un nombre arbitràriament gran de neurones, al que hem anomenat M. En condicions amagades, farem servir una varietat de funcions d'aixafament, que seran les funcions exponencials o *cosig* definides abans.

Des que aquestes funcions no són fitades, fem servir el terme "funció d'aixafament" d'una forma vaga. Abans de comprovar que l'arquitectura general satisfà el Teorema de Stone-Weierstraß, observem que les capacitats d'aproximació de les nostres xarxes queden afectades per diverses modificacions a l'estructura d'arbre.

1. Com les xarxes en arbre poden unir-se en xarxes totalment connectades, els nostres teoremes s'hi extenen bé.

2. Si el rang de la funció aproximant és apropiadament fitat, podem incloure una funció d'aixafament contínua i invertible a la neurona de sortida. Obtenim aquest resultat observant-ho, prioitzant l'aixafat, tenim una funció contínua i una neurona de sortida lineal. (Per validar aquest argument, el rang de la funció aproximant ha d'ésser contingut al de la funció d'aixafament.)

3. N còpies d'una xarxa, situades a cada costat, poden computar funcions contínues N-dimensionals avaluades en vectors. En altres paraules, xarxes d'una sola entrada es generalitzen a diverses entrades.

4. El preprocessament d'entrades via qualsevol funció invertible i contínua no afecta la capacitat d'una arquitectura per aproximar funcions contínues.

La primera hipòtesi del TSW és que podem aproximar la funció identitat $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{1}$. Una forma òbvia de computar aquesta funció és agafar tots els pesos sinàptics (als que hem anomenat w_m i w_{mn}) a la xarxa iguals a zero excepte un nombre petit d'entrades a l'última entrada de suma.

Una forma més fàcil de computar aquesta funció és emprant una condició final amb una funció d'aixafament el valor de sortida de la qual és 1 per una entrada de 0: podem comprovar-ho a les que hem definit abans.

Per tant, pesos sinàptics nuls donen sortides iguals a 1. Això elimina la necessitat de posar entrades estranyes. Excepte a la xarxa logística, totes les xarxes que hem vist són d'aquesta mena.

Sí o sí, necessitem pel que defineix el llibre [11], que les funcions pertanyin a un reticle que separa punts i que contingui les constants.

5.2 Aplicacions al Teorema de Picard

El teorema de Picard, explicat a [12], enuncia que si tenim el Problema de Valors Inicials (PVI):

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

i $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ són funcions contínues a un rectangle $R := \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ que conté el punt (x_0, y_0), llavors el PVI té una única solució a $I := [x_0 - h, x_0 + h], h > 0$. Definim la iteració de Picard com a:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt$$

i produeix una seqüència de funcions $\{y_n(x)\}$ que convergeixen uniformement en I.

És cert que vam veure una sèrie de conceptes a l'assignatura de EDOs que ens va permetre demostrar el teorema, com ara el Lema de Gronwall o el Teorema del Punt Fix de Banach, però el que ens interessa aquí és veure que pel TAW, es pot aproximar aquesta f per polinomis en les variables x, y i com la integral definida al PVI és d'un polinomi, llavors sortirà també un polinomi, i per n prou gran, la solució aproximarà la de la EDO original, fent servir el lema que diu que si tenim M espai dens a N, i N espai dens a O, llavors M és dens a O.

5.3 Aproximació per polinomis ortonormals

Volem resoldre la EDP

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, (x,t) \in [-1,1] \times [0,+\infty] \\ u(x,0) = f(x), x \in [-1,1] \end{matrix} \right\}$$

I pel que vam veure a l'assignatura d'EDPs, la solució general és:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) e^{-n^2\pi^2 t/4}$$

on les ϕ_n formen un sistema ortonormal de funcions L_2, i
$a_n := \int_{-1}^{1} \phi_n(t) f(t) dt$. Per $t = 0$, tenim la solució general:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

que volem igualar a la nostra funció $f(x)$. Per tant, aquí sabem que tota funció L_2 es pot aproximar per combincions lineals d'un sistema ortonormal complet de funcions (Anàlisi real, anàlisi de Fourier), i que la funció f és contínua a [-1,1].

En aquesta solució de la EDP, les funcions ortonormals són polinomis trigonomètrics, degut a la seva resolució. I justament es demostra que una certa combinació lineal d'aquestes funcions aproxima f a L_2. Però també n'hi ha d'altres sistemes ortonormals que no necessàriament satisfan la EDP, però sí que també satisfan les altres condicions abans descrites.

En tot cas, el que ens cal veure és que una funció contínua a un interval tancat és L_2.

Proposició 5.3.1: Tota funció contínua en un interval fitat és L_2.

De fet, és $L_p \quad \forall 1 \leq p < \infty$.

Dem.: Suposem que M és la fita de f. Llavors,

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \int_a^b M^2 dx = M^2(b-a). \ \square \text{ QED.}$$

Noteu que sempre podem reescalar $[a,b]$ a $[-1,1]$ mitjançant la transformació lineal.

Existeixen moltes famílies de funcions ortonormals, però el tipus que ens interessa són polinomis. I hi ha una família de polinomis que s'anomenen de Legendre, que tenen per fórmula, anomenada Fórmula de Rodrigues (la normalitzem per fer veure que són ortonormals):

$$p_n(x) := \frac{\sqrt{2n+1}}{2^{n+1}n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, n \in \mathbb{N}, -1 \leq x \leq 1$$

$$a_n := \int_{-1}^1 p_n(t)f(t)dt$$

I llavors definim els polinomis aproximadors de les funcions com les sumes parcials:

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k p_k(x)$$

I el teorema de Fourier ens diu que aquests polinomis per n prou gran aproximen f, i per tant l'espai vectorial generat pels polinomis de Legendre és dens tant a l'espai de funcions contínues com a L_2, pel lema 5.1.2, i pel TAW. $\square$ QED.

Capítol 6

Conclusions

Com hem vist al llarg d'aquest document, hem après diverses coses. Per una banda, amb el Teorema d'Aproximació de Weierstraß (aproximació per polinomis), hem vist recurrentment definicions de transformades polinòmiques per integrals. Per altra banda, amb el Teorema de Stone-Weierstraß, hem vist que efectivament no cal el teorema anterior per demostrar-lo, i a més bàsicament fa servir la compacitat dels conjunts als quals la funció és definida. I també n'hem vist generalitzacions d'ambdós, com els teoremes de Müntz, el de Wiener, i el dels operadors lineals.

A més, les generalitzacions d'aquests teoremes ens han obert interrogants sobre quines condicions han de complir els espais de funcions per ésser densos a les contínues en un compacte, i fins i tot un no ha quedat resolt: l'espai generat per funcions que particionen la unitat hi és dens?? Això quedarà com a conjectura o problema obert per possibles recerques futures al respecte...

I amb les aplicacions hem après que gràcies a aquests teoremes, ja generalitzats a $\mathbb{R}^N$, podem aproximar funcions donades per xarxes neuronals o fins i tot per equacions diferencials, el que ens pot facilitar molt els càlculs, sobretot a l'emprar-se en computació numèrica.

Ras i curt, hem pogut veure tant la versatilitat d'aquests teoremes com el seu grau d'aplicabilitat a problemes de la vida real.

Bibliografia

[1] Donald Estep, "Practical analysis in one variable", ed. Springer, 2002.

http://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/9780387954844-c36.pdf

[2] Shirley Jo Nichols, "Polynomial Approximation: the Weierstrass Approximation Theorem", Thesis at University of Hawaii, agost 1982.

http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a118974.pdf

[3] LaRita Warnell Hipp, "The Weierstrass Approximation Theorem", Master of Mathematics, University of South Carolina, 2011.

https://scholarcommons.sc.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3300&context=etd

[4] Anton R. Schep, "WEIERSTRASS' PROOF OF THE WEIERSTRASS APPROXIMATION THEOREM", apunts de classe, maig 2007.

http://people.math.sc.edu/schep/weierstrass.pdf

[5] Matt Young, "The Stone-Weierstrass Theorem", Notes for MATH328, Queens University, 2006.

http://www.mast.queensu.ca/~speicher/Section14.pdf

[6] Rudolf Výborný, "The Weierstrass theorem on polynomial approximation", Mathematica Bohemica, Vol. 130 (2005), No. 2, 161–166

https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/134132/MathBohem_130-2005-2_4.pdf

[7] Lojasiewicz, S., "An introduction to the theory of real functions", pgs. 31-32. Wiley– Interscience, Chichester. 3rd ed. Any 1988.

[8] Dilcia Pérez, Yamilet Quintana, "A survey on the Weierstrass approximation theorem", Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado Barquisimeto i Universidad Simón Bolívar, 2007.

https://www.emis.de/journals/DM/v16-1/art14.pdf

[9] Philip Gaddy, "THE STONE-WEIERSTRASS THEOREM AND ITS APPLICATIONS TO L_2 SPACES", apunts de classe, 1 de setembre de 2016.

http://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Gaddy.pdf

[10] Bruno Brosowski and Frank Deutsch, "AN ELEMENTARY PROOF OF THE STONE-WEIERSTRASS THEOREM", American Mathematical Society, 1 de gener de 1981.

http://vigo.ime.unicamp.br/MT401-2016/S0002-9939-1981-0589143-8.pdf

[11] Cotter, N.E.: "The Stone-Weierstrass Theorem and Its Application to Neural Networks". IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS. VOL. I. NO. 4, DECEMBER 1990

[12] Denise Gutermuth, "Picard's Existence and Uniqueness Theorem", notes of Fundamental of Differential equations.

https://embedded.eecs.berkeley.edu/eecsx44/lectures7Spring2013/Picard.pdf

[13] José Luis Dávila Albarrán, "El Teorema de Müntz-Szász", Universidad de los Andes, octubre de 2009.

http://www.ciencias.ula.ve/matematica/estudiantes/pdf/2009/Tesis_JoseDavila.pdf

[14] Lars Gärding, "Some Points of Analysis and Their History", American Mathematical Society.

http://www.fuchs-braun.com/media/9e172558862a7573ffff8231fffffff1.pdf

[15] N- L. Carothers, "A Short Course on Approximation Theory", Math 682, Bowling Green State University, 1998.

http://parallel.bas.bg/dpa/BG/dimov/Cources/Mathematical%20Modeling/assemble.pdf

[16] John O'Connor, "The Weierstrass Approximation Theorem", School of Mathematics and Statistics University of St. Andrews, Scotland , setembre de 2001.

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~john/analysis/Lectures/L19.html

[17] Alex Freire, "STONE-WEIERSTRASS THEOREM-Notes", apunts de classe, University of Tennessee.

http://www.math.utk.edu/~freire/teaching/m447f16/StoneWeierstrassNotes.pdf

[18] Iosif Petrakis, "A direct constructive proof of a Stone-Weierstrass theorem for metric spaces", München Universität.

http://www.math.lmu.de/~petrakis/SW.pdf

[19] Kenneth I. Joy, "BERNSTEIN POLYNOMIALS", Visualization and Graphics Research Group, Department of Computer Science, University of California, Davis, 1996-2000.

http://www.idav.ucdavis.edu/education/CAGDNotes/Bernstein-Polynomials.pdf

[20] Adrian Holhos, "Uniform weighted approximation by positive linear operators", Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 56 (2011), No. 3, 135–146

http://www.cs.ubbcluj.ro/~studia-m/2011-3/16-Holhos-final.pdf

[21] Errett Bishop, Douglas Bridges, "Constructive Analysis", pgs. 105-106, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, Department of Mathematics, University of California, San Diego, EEUU, 1980.